Racine carrée d'un opérateur

On considère une suite (P_n) de polynômes définie par récurrence de la façon suivante :

$$\mathrm{P}_0 = 0, \quad \mathrm{P}_{n+1} = \frac{1}{2}\,(\mathrm{X} + \mathrm{P}_n^2).$$

Il est clair par récurrence que P_n est un polynôme à coefficients réels ≥ 0, pour tout entier $n \geq 0$. Il y a plus : si on pose $\mathrm{Q}_0 = 0$ puis $\mathrm{Q}_{n+1} = \mathrm{P}_{n+1} - \mathrm{P}_n$ pour $n \geq 0$, on voit que

$$\mathrm{Q}_1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{X}, \quad \mathrm{Q}_{n+2} = \frac{1}{2}\,(\mathrm{P}_{n+1}^2 - \mathrm{P}_n^2) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Q}_{n+1}(\mathrm{P}_{n+1} + \mathrm{P}_n), \tag{1}$$

ce qui permet de montrer par récurrence que Q_n est lui aussi à coefficients réels ≥ 0, pour tout $n \geq 0$.

Fixons un réel x tel que $0 \leq x \leq 1$, et considérons la suite $x_n = (\mathrm{P}_n(x))$; on a

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\,(x + x_n^2).$$

On vérifie immédiatement par récurrence que $0 \leq x_n \leq 1$: en effet $0 = x_0 \leq 1$ et par hypothèse $0 \leq x \leq 1$, donc si on sait que $0 \leq x_n \leq 1$, on déduit que

$$0 \leq (x + x_n^2)/2 \leq 1.$$

On a de plus $x_{n+1} - x_n = \mathrm{Q}_{n+1}(x) \geq 0$. Ainsi, la suite $(\mathrm{P}_n(x))$ est croissante et majorée par 1, donc convergente vers une limite $\mathrm{L}(x)$ qui vérifie $0 \leq \mathrm{L}(x) \leq 1$ et

$$\mathrm{L}(x) = \frac{1}{2}\,\big(x + \mathrm{L}(x)^2\big),$$

d'où il résulte que $1 - x = 1 - 2\,\mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(x)^2 = (1 - \mathrm{L}(x))^2$. On a donc

$$\forall x \in [0,1], \quad \mathrm{L}(x) = 1 - \sqrt{1-x}.$$

Le résultat précédent appliqué avec $x = 1$ montre que la suite $(\mathrm{P}_n(1))$ tend en croissant vers $\mathrm{L}(1) = 1$; il en résulte que la série à termes positifs $\sum \mathrm{Q}_n(1)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Q}_n(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(\mathrm{P}_{n+1}(1) - \mathrm{P}_n(1)\big) = \lim_{n=0} \mathrm{P}_n(1) = 1.$$

Il faut aussi se rappeler pour la suite que Q_n est un polynôme à coefficients positifs, qu'on écrira

$$\mathrm{Q}_n = \sum_{k \geq 0} q_{n,k}\,\mathrm{X}^k$$

avec $q_{n,k} \geq 0$.

Soit $\mathbf{A}$ une algèbre de Banach unitaire, avec un élément neutre pour la multiplication noté $\mathbf{1}$; si a est un élément de $\mathbf{A}$ tel que $\|a\| \le 1$, on sait donner un sens à $a_n = \mathrm{P}_n(a) \in \mathbf{A}$ et pour tout entier $n \ge 0$ on a

$$a_{n+1} = \mathrm{P}_{n+1}(a) = \frac{1}{2}(a + a_n^2)\,;$$

de plus $a_n - a_{n-1} = \mathrm{Q}_n(a)$ vérifie, puisque $\|a\| \le 1$

$$\|\mathrm{Q}_n(a)\| = \Big\| \sum_{k \ge 0} q_{n,k} a^k \Big\| \le \sum_{k \ge 0} |q_{n,k}|\, \|a^k\| \le \sum_{k \ge 0} q_{n,k} = \mathrm{Q}_n(1),$$

par conséquent $\sum \|a_{n+1} - a_n\| < +\infty$, ce qui entraîne que la suite (a_n) converge dans l'espace normé complet $\mathbf{A}$. La limite $\mathrm{L}(a)$ vérifie encore

$$(\mathbf{1} - \mathrm{L}(a))^2 = \mathbf{1} - a.$$

En fait $\sum_{n=0}^{+\infty} \|a_{n+1} - a_n\| \le 1$, donc $\|\mathrm{L}(a)\| \le 1$. Si $c \in \mathbf{A}$ et $ca = ac$, on voit que c commute avec tous les polynômes en a tels que $a_n = \mathrm{P}_n(a)$, donc c commute avec la limite $\mathrm{L}(a)$, et aussi avec $b = \mathbf{1} - \mathrm{L}(a)$.

Pour tout élément $a \in \mathbf{A}$ tel que $\|a\| \le 1$, il existe un élément $b \in \mathbf{A}$ qui vérifie $b^2 = \mathbf{1} - a$ (si on veut le dire ainsi : b est une racine carrée de $\mathbf{1} - a$). L'élément b commute avec tout élément c qui commute avec a, et $\|\mathbf{1} - b\| \le 1$.

On peut remarquer que les polynômes P_n «convergent» vers la série entière de

$$1 - \sqrt{1-x} = \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{8}\,x^2 + \frac{1}{16}\,x^3 + \frac{5}{128}\,x^4 + \frac{7}{256}\,x^5 + \cdots$$

On a en effet

$$\mathrm{P}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{X}, \quad \mathrm{P}_2 = \frac{1}{2}\mathrm{X} + \frac{1}{8}\mathrm{X}^2, \quad \mathrm{P}_3 = \frac{1}{2}\mathrm{X} + \frac{1}{8}\mathrm{X}^2 + \frac{1}{16}\mathrm{X}^3 + \frac{1}{128}\mathrm{X}^4,$$

et on va préciser cette «convergence». Pour tout polynôme non nul

$$\mathrm{P} = \sum_{k \ge 0} c_k \mathrm{X}^k$$

désignons par $v(\mathrm{P})$ le plus petit entier k tel que $c_k \ne 0$. On a $v(\mathrm{Q}_1) = 1$, ainsi que $v(\mathrm{P}_n) = 1$ pour tout $n \ge 1$, et on peut voir par la relation de récurrence (1) que $v(\mathrm{Q}_{n+2}) = v(\mathrm{Q}_{n+1}) + 1$, donc $v(\mathrm{Q}_n) = n$ pour tout $n \ge 1$. Ceci montre que les n premiers coefficients de P_n sont vraiment ceux de la série entière.

La solution ci-dessus est donc proche parente de la solution par la série entière qu'on va rappeler maintenant. Si on a montré le résultat taupinal : *la somme de la série produit est le produit des sommes des deux séries entières* dans le contexte des algèbres de Banach, on peut appliquer tout de suite la série entière de $\sqrt{1-x}$ à l'élément $a \in \mathbf{A}$, pourvu que $\|a\| \le 1$. L'élément c obtenu par remplacement de x par a dans la série entière vérifie donc $c^2 = \mathbf{1} - a$. Le raisonnement ci-dessus avec la suite de polynômes permet d'éviter le résultat taupinal. C'est un gain qu'on pourra apprécier, ou trouver vraiment modeste, selon les goûts.

Cas hermitien positif

Soit H un espace de Hilbert réel ou complexe ; un endomorphisme continu $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ est dit *positif* si T est hermitien et si $\langle \mathrm{T}x, x\rangle$ est positif pour tout $x \in \mathrm{H}$,

$$\forall x, y \in \mathrm{H}, \quad \langle \mathrm{T}x, y\rangle = \langle x, \mathrm{T}y\rangle, \quad \langle \mathrm{T}x, x\rangle \geq 0.$$

Dans le cas complexe, il suffit de dire que $\langle \mathrm{T}x, x\rangle$ est réel positif pour tout $x \in \mathrm{H}$: cela implique que T est hermitien ; en revanche, cette hypothèse ne suffit pas dans le cas réel : si H est réel, $\|\mathrm{S}\| < 1$, avec $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ non hermitien, l'opérateur $\mathrm{T} = \mathrm{Id} - \mathrm{S}$ vérifie $\langle \mathrm{T}x, x\rangle \geq 0$ pour tout x, mais ne doit pas être déclaré positif, car il n'est pas hermitien.

Il est clair qu'une somme d'opérateurs positifs est positive, de même que le produit par un scalaire réel ≥ 0. Si B est hermitien, ses puissances paires sont positives :

$$\langle \mathrm{B}^{2n}x, x\rangle = \langle \mathrm{B}^n x, \mathrm{B}^n x\rangle = \|\mathrm{B}^n x\|^2 \geq 0.$$

Si B est positif, toutes les puissances sont positives,

$$\langle \mathrm{B}^{2n+1}x, x\rangle = \langle \mathrm{B}(\mathrm{B}^n x), \mathrm{B}^n x\rangle \geq 0.$$

Il résulte de ces remarques simples que si P est un polynôme à coefficients réels ≥ 0, alors $\mathrm{P}(\mathrm{B})$ est positif. Si S est positif, la forme sesquilinéaire $(x, y) \to \langle \mathrm{S}x, y\rangle$ est positive, donc on peut lui appliquer Cauchy-Schwarz,

$$|\langle \mathrm{S}x, y\rangle|^2 \leq \langle \mathrm{S}x, x\rangle \, \langle \mathrm{S}y, y\rangle.$$

On prenant le sup en y de norme ≤ 1, on obtient pour tout $x \in \mathrm{H}$

$$\|\mathrm{S}x\|^2 \leq \|\mathrm{S}\| \, \langle \mathrm{S}x, x\rangle \,;$$

on en déduit que $\mathrm{S}x = 0$ si et seulement si $\langle \mathrm{S}x, x\rangle = 0$, et que

$$\|\mathrm{S}\| = \sup\{\langle \mathrm{S}x, x\rangle : \|x\| \leq 1\}. \tag{2}$$

Supposons l'opérateur T hermitien positif de norme ≤ 1. Posons $\mathrm{A} = \mathrm{Id} - \mathrm{T}$, opérateur positif. D'après (2), on a $\|\mathrm{A}\| \leq 1$, ce qui permet d'appliquer ce qui a été fait précédemment : la suite $(\mathrm{P}_n(\mathrm{A}))$ converge dans l'algèbre $\mathcal{L}(\mathrm{H})$, et elle est formée d'opérateurs positifs ; la limite $\mathrm{L}(\mathrm{A})$ est donc hermitienne, et on sait que $\|\mathrm{L}(\mathrm{A})\| \leq 1$. Il en résulte que $\mathrm{B} = \mathrm{Id} - \mathrm{L}(\mathrm{A})$ est positif. Donc $\mathrm{B}^2 = \mathrm{Id} - \mathrm{A} = \mathrm{T}$, et on a trouvé une racine positive B pour T.

Soit C un autre opérateur positif tel que $\mathrm{C}^2 = \mathrm{T}$; on va voir que $\mathrm{C} = \mathrm{B}$, montrant ainsi *l'unicité* de la racine positive de T positif. Puisque T est un polynôme de C, T et C commutent et il en résulte que B et C commutent d'après les propriétés générales de B. On a donc

$$0 = \mathrm{C}^2 - \mathrm{B}^2 = (\mathrm{C} - \mathrm{B})(\mathrm{C} + \mathrm{B})$$

ce qui montre que $\mathrm{C} - \mathrm{B}$ est nul sur l'image de $\mathrm{C} + \mathrm{B}$, donc aussi sur l'adhérence F de cette image. Comme $\mathrm{C} + \mathrm{B}$ est hermitien, l'espace H est somme directe de F et du noyau de $\mathrm{C} + \mathrm{B}$. Pour finir de montrer que $\mathrm{C} = \mathrm{B}$, il suffit de voir que $\mathrm{C} - \mathrm{B}$ est nul sur $\ker(\mathrm{C} + \mathrm{B})$. On note que par la positivité de C,

$$\langle \mathrm{B}x, x\rangle \leq \langle \mathrm{C}x, x\rangle + \langle \mathrm{B}x, x\rangle = \langle (\mathrm{C} + \mathrm{B})\, x, x\rangle$$

ce qui montre que le noyau de $\mathrm{C} + \mathrm{B}$ est contenu dans celui de B, et symétriquement dans celui de C : on a donc $\mathrm{B} = \mathrm{C} = 0$ sur le noyau de $\mathrm{C} + \mathrm{B}$, et en particulier $\mathrm{C} - \mathrm{B}$ est nul sur $\ker(\mathrm{C} + \mathrm{B})$.