Formule de Stirling, à partir d'une suite de fonctions intégrables

1. *Étude très précise mais peut-être un peu lourde*

On commence par quelques préliminaires. Pour tout $x > -1$, on a

$$x - \ln(1+x) = \int_0^x \Bigl(1 - \frac{1}{1+s}\Bigr)\, ds = \int_0^x \frac{s}{1+s}\, ds = x^2 \int_0^1 \frac{u}{1+xu}\, du$$

où on a posé $s = xu$ pour trouver la dernière expression. On a donc pour $x \neq 0$

$$q(x) := \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \int_0^1 \frac{u}{1+xu}\, du\,; \tag{1}$$

la dernière expression est définie aussi pour $x = 0$, et elle réalise le prolongement de q par continuité, en donnant $q(0) = 1/2$. Sur cette même expression il est clair que $q(x)$ est décroissant, car si $-1 < x \le y$ on a $u/(1+xu) \ge u/(1+yu)$ pour tout $u \in]0,1[$ (si on n'est pas assez convaincu — mais on aurait vraiment tort — on calculera $q'(x)$ en dérivant sous l'intégrale).

On voit par le changement de variable $x = n + y\sqrt{n}$ que

$$n! = \int_0^{+\infty} x^n\, \mathrm{e}^{-x}\, dx = n^{n+1/2}\, \mathrm{e}^{-n} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \Bigl(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\Bigr)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}\, dy.$$

Posons pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $n \ge 1$

$$f_n(y) = \mathbf{1}_{\{y > -\sqrt{n}\}} \Bigl(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\Bigr)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}\,;$$

on a par conséquent

$$\frac{n!}{n^{n+1/2}\, \mathrm{e}^{-n}} = \int_{\mathbb{R}} f_n(y)\, dy.$$

Le reste de ce développement consiste à étudier la suite de fonctions intégrables (f_n). La limite simple de $f_n(y)$ est obtenue à partir du DL du logarithme

$$\ln(1+u) = u - u^2/2 + o(u^2)\,;$$

quand n est assez grand pour que $y > -\sqrt{n}$, on a avec $u = y/\sqrt{n}$

$$-\ln\bigl(f_n(y)\bigr) = n\Bigl(\frac{y}{\sqrt{n}} - \ln\Bigl(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\Bigr)\Bigr) = n\,\Bigl(\frac{y^2}{2n} + o\Bigl(\frac{y^2}{n}\Bigr)\Bigr) \to \frac{y^2}{2}\,.$$

On veut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (f_n), qui converge simplement vers la fonction $y \to \mathrm{e}^{-y^2/2}$; on doit majorer $f_n(y)$ indépendamment de $n \ge 1$. On a pour tout $n \ge 1$ et $y > -\sqrt{n}$

$$-\ln\bigl(f_n(y)\bigr) = n\Bigl(\frac{y}{\sqrt{n}} - \ln\Bigl(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\Bigr)\Bigr) = y^2\, q\Bigl(\frac{y}{\sqrt{n}}\Bigr),$$

où la fonction q est définie à l'équation (1). On a vu que q est décroissante ; il en résulte que pour $y > 0$ fixé, $-\ln\bigl(f_n(y)\bigr)$ est croissant en n, et $f_n(y)$ décroissant en n ; pour $y \geq 0$ et tout $n \geq 1$,

$$0 \leq f_n(y) \leq f_1(y) = (1+y)\,\mathrm{e}^{-y},$$

qui est intégrable sur $[0, +\infty[$. Dans le cas où $y < 0$ les conclusions sont inversées ; tant que $y < -\sqrt{n}$ on a $f_n(y) = 0$; à partir du moment où $\sqrt{n} > -y$, $n \to q(y/\sqrt{n})$ est décroissant en n, et $f_n(y)$ croissant : dans le cas $y < 0$, la suite $(f_n(y))$ est majorée par sa limite $\mathrm{e}^{-y^2/2}$,

$$0 \leq f_n(y) \leq \mathrm{e}^{-y^2/2}\,.$$

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(y) = \mathrm{e}^{-y^2/2}$ pour $y < 0$ et $g(y) = (1+y)\,\mathrm{e}^{-y}$ pour $y \geq 0$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et elle domine la suite (f_n) de fonctions positives ou nulles ; la limite simple de $f_n(y)$ est $\mathrm{e}^{-y^2/2}$. Il en résulte par convergence dominée que

$$\frac{n!}{n^{n+1/2}\,\mathrm{e}^{-n}} = \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \Bigl(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\Bigr)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}\; dy \to \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2/2}\; dy = \sqrt{2\pi}.$$

C'est la *formule de Stirling*,

$$n! \sim n^{n+1/2}\,\mathrm{e}^{-n}\,\sqrt{2\pi}.$$

Remarque 1. Pour voir simplement que $f_n(y)$ est plus petit que sa limite dans le cas $y < 0$, on peut se contenter d'écrire, avec $1 > u := -y/\sqrt{n} > 0$

$$-\ln(f_n(y)) = n\Bigl(\frac{y}{\sqrt{n}} - \ln\Bigl(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\Bigr)\Bigr) = n\bigl(-u - \ln(1-u)\bigr) = n \sum_{k \geq 2} \frac{u^k}{k} \geq n\frac{u^2}{2} = \frac{y^2}{2}\,\cdot$$

Remarque 2. Comme la suite (f_n) est monotone sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$, on n'a pas vraiment besoin du théorème de Lebesgue pour conclure : on coupe l'intégrale en deux, et le théorème de convergence monotone suffit sur chaque morceau (sur $[0, +\infty[$, il faut raisonner sur la suite croissante $(f_1 - f_n)$ de fonctions positives, pour éviter d'appliquer un théorème faux). Mais est-ce bien la peine de faire tout ce travail pour ce bien maigre bénéfice ?

Le fait que n soit entier dans ce qui précède n'est pas crucial ; le raisonnement précédent donne aussi bien un équivalent pour

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}\,\mathrm{e}^{-x}\; dx$$

quand t tend vers $+\infty$. Le résultat est un cas particulier de la *méthode de Laplace* (voir par exemple Gourdon, chap. III.4).

2. *Méthode allégée*

Précisément, s'agissant de la méthode de Laplace, on commence en général par se restreindre à un voisinage V du point x_0, supposé unique, où le maximum d'une certaine fonction est atteint, et on montre que l'intégrale sur le reste de l'espace est négligeable devant l'intégrale sur V. Dans l'étude précédente, le fait qu'on ait travaillé sur $\mathbb{R}$ tout entier a conduit à un majorant de Lebesgue g assez désagréable. On se fatigue un peu moins en procédant comme suit : on note d'abord que

$$\frac{1}{n!} \int_{2n}^{+\infty} x^n \,\mathrm{e}^{-x} \, dx \to 0$$

quand n tend vers l'infini ; en effet, par le changement de variable $x = n + y$, on se ramène à

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \int_{n}^{+\infty} (n+y)^n \,\mathrm{e}^{-n-y} \, dy &\leq \frac{1}{n!} \int_{n}^{+\infty} (2\,y)^n \,\mathrm{e}^{-n-y} \, dy \\ &\leq \frac{1}{n!} \Big(\frac{2}{\mathrm{e}}\Big)^n \int_{0}^{+\infty} y^n \,\mathrm{e}^{-y} \, dy = \Big(\frac{2}{\mathrm{e}}\Big)^n, \end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini puisque $2 < \mathrm{e}$. Il suffit donc d'étudier l'intégrale

$$\mathrm{I}_n = \int_{0}^{2n} x^n \,\mathrm{e}^{-x} \, dx$$

et on retrouve une partie des étapes de la « méthode lourde ». On voit par le changement de variable $x = n + y\sqrt{n}$ que

$$\mathrm{I}_n = n^{n+1/2} \,\mathrm{e}^{-n} \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \Big(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\Big)^n \,\mathrm{e}^{-y\sqrt{n}} \, dy.$$

Pour tout x tel que $|x| < 1$, on a

$$x - \ln(1+x) = \int_0^x \frac{s}{1+s} \, ds = x^2 \int_0^1 \frac{u}{1+xu} \, du \geq \frac{x^2}{2} \int_0^1 u \, du = \frac{x^2}{4} \cdot$$

On veut majorer indépendamment de $n \geq 1$

$$f_n(y) = \mathbf{1}_{\{|y| < \sqrt{n}\}} \Big(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\Big)^n \,\mathrm{e}^{-y\sqrt{n}} \,.$$

On a pour tout $n \geq 1$, lorsque $|y| < \sqrt{n}$

$$-\ln\big(f_n(y)\big) = n\Big(\frac{y}{\sqrt{n}} - \ln\Big(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\Big)\Big) \geq n \,\frac{y^2}{4n} \;= \frac{y^2}{4} \cdot$$

On a donc pour $y \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq 1$ la majoration

$$f_n(y) \leq \mathrm{e}^{-y^2/4}$$

par une fonction intégrable fixe, ce qui permet de conclure.

3. *Méthode de Laplace*

Il s'agit d'étudier le comportement lorsque $t \to +\infty$ de

$$f(t) = \int_{\mathrm{I}} g(x)\, \mathrm{e}^{th(x)}\, dx$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, borné ou non. On suppose que h atteint son maximum dans I en un point x_0 unique, intérieur à I ; plus précisément, on demande que pour tout voisinage V de x_0, on ait

$$\sup\{h(y) : y \in \mathrm{I} \setminus \mathrm{V}\} < h(x_0)\,; \tag{2}$$

on suppose aussi que h est de classe C^2 dans I, que $h''(x_0) < 0$, que g est continue dans I avec $g(x_0) \neq 0$, et enfin qu'il existe t_0 tel que

$$\int_{\mathrm{I}} |g(x)|\, \mathrm{e}^{t_0 h(x)}\, dx < +\infty.$$

Sous ces hypothèses on montre que

$$f(t) \sim g(x_0)\, \mathrm{e}^{th(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{-t\, h''(x_0)}}$$

lorsque t tend vers $+\infty$.

Esquisse de preuve.— En divisant $f(t)$ par $g(x_0)\, \mathrm{e}^{th(x_0)}$ on ramène la discussion au cas où $g(x_0) = 1$ et $h(x_0) = 0$. On peut trouver un intervalle ouvert V autour de x_0, contenu dans I, dans lequel $h''(x) < -2\,\varepsilon < 0$ et $|g(x)| < 1 + \varepsilon$. On peut supposer que $x_0 = 0$, pour alléger un peu les écritures. On étudie d'abord

$$f_1(t) = \int_{\mathrm{V}} g(x)\, \mathrm{e}^{th(x)}\, dx\,;$$

on écrit avec Taylor-Lagrange, lorsque $x \in \mathrm{V}$

$$h(x) = h(0) + x\, h'(0) + \frac{x^2}{2}\, h''(c) = \frac{x^2}{2}\, h''(c) \leq -\varepsilon x^2$$

où c est un certain point de l'intervalle V, et on a aussi

$$h(x) = \frac{x^2}{2}\, h''(0) + o(x^2).$$

Pour chaque t donné, on choisit u réel de sorte que $t\, h(uy) \sim -y^2/2$, c'est-à-dire qu'on choisit $-t\, u^2 h''0) = 1$; en posant $a = -1/h''(0) > 0$, on voit que $u = \sqrt{a/t}$. Par le changement de variable $x = uy$, on obtient

$$f_1(t) = \sqrt{\frac{1}{-t\, h''(x_0)}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{uy \in \mathrm{V}\}} g(uy)\, \mathrm{e}^{th(uy)}\, dy.$$

Quand t tend vers l'infini, u tend vers 0 et la fonction sous l'intégrale tend simplement vers la fonction

$$y \in \mathbb{R} \to g(0)\, \mathrm{e}^{-y^2/2} = \mathrm{e}^{-y^2/2}$$

car

$$t\, h(uy) = tu^2\, \frac{y^2}{2}\, h''(0) + t\, o(u^2 y^2) = -\frac{y^2}{2} + t\, o(y^2/t) \to -\frac{y^2}{2}\,,$$

et par ailleurs l'inégalité, valable quand $uy \in \mathrm{V}$,

$$t\, h(uy) = tu^2\, \frac{y^2}{2}\, h''(c) \leq -\varepsilon a y^2$$

donne la majoration (en valeur absolue) de $y \to \mathbf{1}_{\{uy \in \mathrm{V}\}} g(uy)\, \mathrm{e}^{th(uy)}$ par la fonction intégrable fixe

$$y \in \mathbb{R} \to (1+\varepsilon)\, \mathrm{e}^{-\varepsilon a y^2}\,.$$

Il en résulte que

$$\sqrt{t/a}\, f_1(t) \to \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2/2}\; dy = \sqrt{2\pi}.$$

Il reste à montrer que l'intégrale $f_2(t)$ hors de V est négligeable devant le terme $f_1(t)$ déjà étudié. D'après l'hypothèse (2), et puisque $h(0) = 0$, on aura $h(x) \leq b < 0$ hors de l'intervalle V, donc

$$|f_2(t)| \leq \int_{\mathrm{I} \setminus \mathrm{V}} |g(x)|\; \mathrm{e}^{(t-t_0)h(x)}\; \mathrm{e}^{t_0 h(x)}\; dx \leq \mathrm{e}^{b(t-t_0)} \int_{\mathrm{I}} |g(x)|\, \mathrm{e}^{t_0 h(x)}\; dx\,;$$

l'ordre de décroissance exponentiel ($b < 0$) est négligeable devant $f_1(t)$, qui est de l'ordre d'un multiple non nul de $t^{-1/2}$.