Weierstrass et Stone-Weierstrass

Le théorème classique de Weierstrass

Pour démontrer une version du théorème de Weierstrass sur $\mathbb{R}$, considérons la fonction réelle g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - x^2/4 \ \text{ si } \ |x| \le 2, \quad g(x) = 0 \ \text{ sinon.}$$

Cette fonction g est réelle ≥ 0, continue à support compact et atteint un unique maximum au point 0. Par ailleurs, elle est polynomiale de la variable réelle x dans le segment $[-2, 2]$. Pour tout entier $n \ge 1$, définissons c_n par le fait que

$$c_n \int_{\mathbb{R}} g(x)^n \, dx = c_n \int_{-2}^{2} (1 - x^2/4)^n \, dx = 1.$$

On voit facilement que la formule $g_n(x) = c_n \, g(x)^n$ permet de définir une suite (g_n) de fonctions intégrables qui fournit une approximation de l'identité par convolution. Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes, à support dans l'intervalle $[-1, 1]$, la suite $(f * g_n)$ tend uniformément vers f par les théorèmes généraux d'approximation ([a]) par convolution ; on va voir de plus que $f * g_n$ est polynomiale dans l'intervalle $[-1, 1]$. On a

$$(f * g_n)(x) = \int_{\mathbb{R}} g_n(x - y) f(y) \, dy = \int_{-1}^{1} g_n(x - y) f(y) \, dy,$$

où la deuxième égalité résulte de l'hypothèse que f est nulle hors de $[-1, 1]$. Si $|x| \le 1$, compte tenu du fait que l'intégrale précédente est limitée aux y tels que $|y| \le 1$, on aura $|x - y| \le 2$ pour tous les y du domaine d'intégration ; on saura donc que $x - y$ est dans l'intervalle $[-2, 2]$, dans lequel

$$g_n(x - y) = c_n \big(1 - (x - y)^2/4\big)^n = \sum_{k=0}^{2n} x^k \, \mathrm{P}_{k,n}(y),$$

où les $\mathrm{P}_{k,n}$ sont ([b]) des polynômes réels en y. On a donc pour tout x dans $[-1, 1]$

$$(f * g_n)(x) = \sum_{k=0}^{2n} x^k \int_{-1}^{1} \mathrm{P}_{k,n}(y) \, f(y) \, dy$$

qui est bien une fonction polynomiale de la variable réelle x, dont les coefficients $c_{k,n}$ sont les intégrales $\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_{k,n}(y) \, f(y) \, dy$.

Théorème (Weierstrass). *Pour toute fonction continue f sur $\mathbb{R}$, à support contenu dans un compact* K *de $\mathbb{R}$, il existe une suite de fonctions polynomiales qui tend vers f uniformément sur* K.

Si la fonction f est réelle, les polynômes construits ci-dessus sont à coefficients réels ; si f est complexe, on doit évidemment prendre des coefficients complexes. Pour passer au théorème de Weierstrass sur $\mathbb{R}^d$, on peut considérer la fonction réelle g définie sur $\mathbb{R}^d$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad g(x) = 1 - \sum_{i=1}^{d} x_i^2/4 \ \text{ si } \ \|x\| \le 2, \quad g(x) = 0 \ \text{ sinon} ;$$

elle est polynomiale des variables $x_1, \ldots, x_d$ dans la boule euclidienne de rayon 2. On peut généraliser les calculs précédents : comme avant on a quand $\|x\| \le 1$ et $\|y\| \le 1$,

$$g_n(x-y) = c_n \Bigl(1 - \sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2/4\Bigr)^n = \sum_{k \in \mathrm{M}} x^k \,\mathrm{P}_{k,n}(y),$$

où $k = (k_1, \ldots, k_d)$ parcourt la famille M des multi-indices tels que $0 \le k_1 + \cdots + k_d \le 2n$, où on a posé $x^k = \prod_{i=1}^{d} x_i^{k_i}$, et où les $\mathrm{P}_{k,n}$ sont des polynômes des coordonnées (y_i) du point y de $\mathbb{R}^d$. On a donc pour tout x dans la boule unité

$$(f * g_n)(x) = \sum_{k \in \mathrm{M}} x^k \int_{\|y\| \le 1} \mathrm{P}_{k,n}(y)\, f(y)\, dy$$

qui est bien un polynôme dans les coordonnées (x_i).

On va développer une autre approche, utilisant les partitions de l'unité. Il est facile de voir ([c]) que pour tout $\alpha > 0$ donné, on peut trouver un entier N et des fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathrm{N}}$ continues à support compact sur $\mathbb{R}$, chacune ayant son support contenu dans un intervalle de longueur $< \alpha$, telles que $0 \le \varphi_j \le 1$ et $\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \varphi_j(x) = 1$ pour tout $x \in [-a, a]$ (il suffit de vérifier cette affirmation pour un $\alpha > 0$ et de procéder ensuite à des changements d'échelle). On utilisera cette information dans la preuve qui suit.

Théorème (Weierstrass). *Pour toute fonction continue f sur un compact* K *de $\mathbb{R}^d$, il existe une suite de fonctions polynomiales qui tend vers f uniformément sur* K.

Preuve. — On écrira la preuve dans le cas de $\mathbb{R}^2$, pour simplifier. On se donne un compact K de $\mathbb{R}^2$, on choisit $a > 0$ tel que K soit contenu dans le carré $[-a, a]^2$, et on se donne une fonction continue f sur K. Soit $\varepsilon > 0$ donné ; par continuité uniforme de f, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(y) - f(x)| < \varepsilon/2$ dès que la distance entre $x, y \in \mathrm{K}$ est $< \delta$. Considérons une famille de fonctions continues $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathrm{N}}$ sur $\mathbb{R}$, φ_j étant à support dans un intervalle U_j de longueur $< \delta/2$, et $\sum_j \varphi_j = 1$ sur $[-a, a]$. Posons pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $i, j \in \{1, \ldots, \mathrm{N}\}$

$$\varphi_{i,j}(x) = \varphi_i(x_1)\varphi_j(x_2).$$

Cette fonction est nulle en dehors du rectangle ouvert $\mathrm{U}_{i,j} = \mathrm{U}_i \times \mathrm{U}_j$, qui est de diamètre $< \delta$. Il est clair que

$$\sum_{i,j=1}^{\mathrm{N}} \varphi_{i,j}(x) = \Bigl(\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \varphi_i(x_1)\Bigr)\Bigl(\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \varphi_j(x_2)\Bigr) = 1$$

sur le carré $[-a, a]^2$ qui contient K. Désignons par A l'ensemble des couples (i, j) tels que l'ouvert $\mathrm{U}_{i,j}$ rencontre K. Si $x \in \mathrm{K}$ et $(i, j) \notin \mathrm{A}$, le point x n'est pas dans l'ouvert $\mathrm{U}_{i,j}$, donc $\varphi_{i,j}(x) = 0$ et

$$\forall x \in \mathrm{K}, \quad \sum_{(i,j)\in\mathrm{A}} \varphi_{i,j}(x) = \sum_{i,j=1}^{\mathrm{N}} \varphi_{i,j}(x) = 1.$$

Pour chaque $(i, j) \in \mathrm{A}$, choisissons un point $x_{i,j} \in \mathrm{K} \cap \mathrm{U}_{i,j}$ et posons

$$\forall x \in \mathrm{K}, \quad g(x) = \sum_{(i,j)\in\mathrm{A}} \varphi_{i,j}(x) f(x_{i,j}).$$

Soit $x \in \mathrm{K}$; on a

$$f(x) - g(x) = \sum_{(i,j)\in\mathrm{A}} \varphi_{i,j}(x)(f(x) - f(x_{i,j})).$$

Pour chaque terme $\varphi_{i,j}(x)(f(x) - f(x_{i,j}))$ non nul, on a $\varphi_{i,j}(x) \neq 0$, donc $x \in \mathrm{U}_{i,j}$ et $\|x - x_{i,j}\| < \delta$, puisque le diamètre de $\mathrm{U}_{i,j}$ est $< \delta$; il en résulte que $|f(x) - f(x_{i,j})| < \varepsilon/2$ et

$$|f(x) - g(x)| \le \sum_{(i,j)\in\mathrm{A}} \varphi_{i,j}(x)\, |f(x) - f(x_{i,j})| \le \frac{\varepsilon}{2} \sum_{(i,j)\in\mathrm{A}} \varphi_{i,j}(x) \le \varepsilon/2.$$

D'après Weierstrass sur la droite, chaque fonction φ_j peut être approchée sur $[-a, a]$ par une fonction polynomiale P_j ; on en déduit une approximation de $\varphi_{i,j}$ par

$$p_{i,j}(x) = \mathrm{P}_i(x_1)\mathrm{P}_j(x_2)$$

qui est polynomiale des variables x_1, x_2 : si $|\varphi_i(t) - \mathrm{P}_i(t)| \le \eta < 1$ pour tout i et tout $|t| \le a$, on voit ([d]) que $|\varphi_{i,j}(x) - p_{i,j}(x)| \le \eta + (1 + \eta)\eta < 3\eta$. On termine en posant

$$\forall x \in \mathrm{K}, \quad h(x) = \sum_{(i,j)\in\mathrm{A}} p_{i,j}(x) f(x_{i,j})$$

qui est polynomiale sur $\mathbb{R}^2$ et approche f sur K, avec une erreur $\le \varepsilon/2 + 3\eta\, \mathrm{N}^2\, \|f\|_\infty$, erreur qui sera $< \varepsilon$ si on choisit η assez petit.

Weierstrass complexe

Sur $\mathbb{C}^d$, on considérera les d coordonnées complexes $z_j = x_j + \mathrm{i} y_j$, $j = 1, \ldots, d$; identifiant $\mathbb{C}^d$ à $\mathbb{R}^{2d}$ on pourra d'après ce qui précède, pour toute fonction complexe f continue sur un compact $\mathrm{K} \subset \mathbb{C}^d$, approcher uniformément sur K la fonction f par des fonctions polynomiales à coefficients complexes des variables réelles x_j, y_j ; de plus, comme $x_j = \frac{1}{2}(z_j + \overline{z}_j)$ et $y_j = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z_j - \overline{z}_j)$, on peut remplacer les fonctions polynomiales à coefficients complexes en x_j, y_j par des fonctions polynomiales p en $z_j, \overline{z}_j$, $j = 1, \ldots, d$ à coefficients complexes, de la forme

$$\forall z = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d, \quad p(z) = \mathrm{P}(z, \overline{z}) = \sum_{m,n} c_{m,n}\, z_1^{m_1}\, \overline{z}_1^{\,n_1} \ldots z_d^{m_d}\, \overline{z}_d^{\,n_d}$$

où la somme ci-dessus est étendue à un nombre fini de couples (m, n) de multi-indices $m = (m_1, \ldots, m_d)$, $n = (n_1, \ldots, n_d)$ formés de d entiers ≥ 0.

On peut trouver une démonstration standard de Stone-Weierstrass dans tous les bons ouvrages (par exemple Hirsch-Lacombe). La démonstration suivante est un peu moins habituelle : elle consiste à utiliser des idées cependant très habituelles (partition de l'unité), pour ramener le théorème de Stone-Weierstrass au théorème classique de Weierstrass.

Théorème 1 (une forme de Stone-Weierstrass, cas complexe). *On suppose que* X *est un espace topologique compact non vide et* $\mathcal{G}$ *une famille de fonctions continues sur* X *qui sépare les points de* X*. Pour toute fonction* f *complexe continue sur* X *et tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un entier* N*, des fonctions* $g_1, \ldots, g_{\mathrm{N}} \in \mathcal{G}$ *et une fonction* p *sur* $\mathbb{C}^{\mathrm{N}}$*, polynomiale des variables* $z_j, \overline{z}_j$*,* $j = 1, \ldots, \mathrm{N}$ *tels que*

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad \bigl|f(x) - p\bigl(g_1(x), \ldots, g_{\mathrm{N}}(x)\bigr)\bigr| < \varepsilon.$$

Preuve. — Soient f une fonction complexe continue sur X et $\varepsilon > 0$; on considère le sous-ensemble

$$\mathrm{U} = \{(x, y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{X} : |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2\}$$

qui est un ouvert du compact $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$, puisque f est continue. Son complémentaire

$$\mathrm{K} = \{(x, y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{X} : |f(x) - f(y)| \ge \varepsilon/2\} = (\mathrm{X} \times \mathrm{X}) \setminus \mathrm{U}$$

est donc compact. Pour chaque $(x, y) \in \mathrm{K}$, on a $x \neq y$, donc il existe par hypothèse une fonction $g \in \mathcal{G}$ telle que $g(x) \neq g(y)$; l'ensemble $\mathrm{V}_g = \{(u, v) : |g(u) - g(v)| > 0\}$ est un ouvert de K contenant (x, y), donc la famille des $(\mathrm{V}_g)_{g \in \mathcal{G}}$ est un recouvrement ouvert du compact K. Par Borel-Lebesgue, on peut sélectionner une famille finie $g_1, \ldots, g_{\mathrm{N}}$ dans $\mathcal{G}$ telle que les ouverts V_{g_j} correspondants, $j = 1, \ldots, \mathrm{N}$ recouvrent K. La fonction

$$(x, y) \to \Bigl(\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} |g_j(x) - g_j(y)|^2\Bigr)^{1/2}$$

est continue > 0 sur le compact K, donc son minimum est > 0 ; désignons ce minimum par $\delta > 0$. On définit pour tout $x \in \mathrm{X}$

$$\mathrm{G}(x) = (g_1(x), \ldots, g_{\mathrm{N}}(x)) \in \mathbb{C}^{\mathrm{N}} ;$$

l'application G est continue de X dans $\mathbb{C}^{\mathrm{N}}$, et on a si $(x, y) \in \mathrm{K}$

$$\|\mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(y)\| = \Bigl(\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} |g_j(x) - g_j(y)|^2\Bigr)^{1/2} \ge \delta.$$

On a donc pour tout $(x, y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{X}$, selon que $(x, y) \in \mathrm{K}$ ou $(x, y) \in \mathrm{U}$:

$$(1) \qquad \|\mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(y)\| \ge \delta \ \ \textbf{ou} \ \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2.$$

Désignons par $\mathrm{K}_1 = \mathrm{G}(\mathrm{X}) \subset \mathbb{C}^{\mathrm{N}}$ l'image du compact X ; l'ensemble K_1 est un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}^{\mathrm{N}}$. Considérons un recouvrement de K_1 par une famille finie d'ouverts non vides $(\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{I}}$ de diamètre $< \delta$; pour chaque $\alpha \in \mathrm{I}$ soit z_α un point de $\mathrm{K}_1 \cap \mathrm{U}_\alpha$; puisque z_α est dans l'image de X par G, on peut trouver $x_\alpha \in \mathrm{X}$ tel que $\mathrm{G}(x_\alpha) = z_\alpha$. Considérons une partition de l'unité (φ_α) subordonnée(e) aux ouverts U_α, c'est-à-dire que φ_α est nulle en dehors de U_α pour chaque $\alpha \in \mathrm{I}$ et $\sum_{\alpha\in\mathrm{I}} \varphi_\alpha(z) = 1$, pour tout $z \in \mathrm{K}_1$. Posons

$$\forall z \in \mathrm{K}_1, \quad h(z) = \sum_{\alpha\in\mathrm{I}} \varphi_\alpha(z) f(x_\alpha).$$

On va montrer que la fonction $x \in \mathrm{X} \to h(\mathrm{G}(x))$ est proche de f ; on a

$$f(x) - h(\mathrm{G}(x)) = \sum_{\alpha\in\mathrm{I}} \varphi_\alpha(\mathrm{G}(x))\,(f(x) - f(x_\alpha))\,;$$

si un terme particulier $\varphi_\alpha(\mathrm{G}(x))(f(x) - f(x_\alpha))$ de la somme précédente est non nul, on a d'abord $\varphi_\alpha(\mathrm{G}(x)) \neq 0$, donc $\mathrm{G}(x)$ est dans U_α, ainsi que $z_\alpha = \mathrm{G}(x_\alpha)$; comme le diamètre de U_α est $< \delta$, on voit que $\|\mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(x_\alpha)\| < \delta$, ce qui implique d'après la condition (1) que $|f(x) - f(x_\alpha)| < \varepsilon/2$; on a donc

$$\bigl|\varphi_\alpha(\mathrm{G}(x))\,(f(x) - f(x_\alpha))\bigr| \le \frac{\varepsilon}{2}\,\varphi_\alpha(\mathrm{G}(x))$$

pour tout $\alpha \in \mathrm{I}$, donc

$$|f(x) - h(\mathrm{G}(x))| = \Bigl|\sum_{\alpha\in\mathrm{I}} \varphi_\alpha(\mathrm{G}(x))\,(f(x) - f(x_\alpha))\Bigr| \le \frac{\varepsilon}{2} \sum_{\alpha\in\mathrm{I}} \varphi_\alpha(\mathrm{G}(x)) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'après Weierstrass on peut trouver une fonction p sur K_1, polynomiale des variables $z_1, \ldots, z_\mathrm{N}, \overline{z_1}, \ldots, \overline{z_\mathrm{N}}$ telle que $|h(z) - p(z)| < \varepsilon/2$ pour tout $z \in \mathrm{K}_1$. Finalement,

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad \bigl|f(x) - p(\mathrm{G}(x))\bigr| < \varepsilon,$$

le résultat annoncé.

Remarque 1. Pour faire tourner la démonstration il suffit que $\mathcal{G}$ sépare les couples de points (x, y) de X tels que $|f(x) - f(y)| \ge \varepsilon/2$; en particulier il suffit que $\mathcal{G}$ sépare les couples (x, y) tels que $f(x) \neq f(y)$. Cette variante permet par exemple de traiter l'ensemble singleton $\mathcal{G} = \{x \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\}$ sur le compact $\mathrm{X} = [0, 2\pi]$ sans devoir parler de quotient : si f est continue 2π-périodique, l'exponentielle $x \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ sépare les points x, y tels que $f(x) \neq f(y)$; il en résulte que les polynômes en $z, \overline{z}$ de l'exponentielle permettent d'approcher la fonction continue périodique f. Ces polynômes de l'exponentielle sont les fonctions de la forme

$$x \to \sum_{k=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,.$$

Remarque 2. Il est immédiat de modifier l'argument pour qu'il s'applique au cas où f et toutes les fonctions de $\mathcal{G}$ sont à valeurs réelles. Dans ce cas, l'application G est à valeurs dans $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ et on appliquera la version réelle de Weierstrass : à la fin de la preuve, on pourra approcher la fonction réelle h, définie sur $\mathrm{K}_1 \subset \mathbb{R}^\mathrm{N}$, par une fonction polynomiale $\mathrm{P}(u_1, \ldots, u_\mathrm{N})$ des N variables réelles $u_1, \ldots, u_\mathrm{N}$; il existe donc un entier N, des fonctions $g_1, \ldots, g_\mathrm{N} \in \mathcal{G}$ et une fonction polynomiale réelle P des variables réelles $u_1, \ldots, u_\mathrm{N}$ tels que

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad |f(x) - \mathrm{P}(g_1(x), \ldots, g_\mathrm{N}(x))| < \varepsilon.$$

Commençons par le cas réel. On a dit dans la remarque précédente que si $\mathcal{G}$ est une famille de fonctions réelles continues sur le compact X, qui sépare les points de X, toute fonction réelle continue f sur X pourra être approchée uniformément sur X par une fonction de la forme $\psi = \mathrm{P}(g_1, \ldots, g_\mathrm{N})$, avec $g_j \in \mathcal{G}$. Plus précisément, cela signifie que ψ est combinaison linéaire à coefficients réels de fonctions de la forme

$$x \in \mathrm{X} \to g_1(x)^{k_1} \ldots g_\mathrm{N}(x)^{k_\mathrm{N}},$$

avec $k_1, \ldots, k_\mathrm{N}$ entiers ≥ 0. En particulier, lorsque $k_1 = \cdots = k_\mathrm{N} = 0$, on introduit la fonction constante $\mathbf{1}$ dans la combinaison linéaire ; l'ensemble de toutes les fonctions ψ de la forme précédente est la $\mathbb{R}$-algèbre engendrée par la famille $\mathcal{G}$ et par les fonctions constantes.

Supposons réciproquement que l'ensemble $\mathcal{A}$ soit une algèbre de fonctions réelles, contenant les fonctions constantes et séparant les points de X : dans ce cas toutes les fonctions ψ sont encore dans $\mathcal{A}$, ce qui implique par la remarque 2 que toute fonction continue f peut être approchée uniformément par un élément de $\mathcal{A}$.

Théorème (Stone-Weierstrass, cas réel). *On suppose que* X *est un espace topologique compact non vide et* $\mathcal{A}$ *une* $\mathbb{R}$*-algèbre de fonctions continues réelles sur* X*, qui sépare les points de* X *et contient les fonctions constantes. L'algèbre* $\mathcal{A}$ *est dense dans* $\mathrm{C}_\mathbb{R}(\mathrm{X})$*, pour la norme uniforme.*

Dans le cas complexe, l'approximation du théorème 1 était obtenue par une fonction $\psi = p(g_1, \ldots, g_\mathrm{N})$, avec $g_j \in \mathcal{G}$ et p une fonction polynomiale en z_j et $\overline{z}_j$, $j = 1, \ldots, \mathrm{N}$. Cela signifie que ψ est combinaison linéaire à coefficients complexes de fonctions de la forme

$$x \in \mathrm{X} \to g_1(x)^{k_1} \overline{g_1(x)}^{\,\ell_1} \ldots g_\mathrm{N}(x)^{k_\mathrm{N}} \overline{g_\mathrm{N}(x)}^{\,\ell_\mathrm{N}},$$

ce qui montre qu'on doit aussi utiliser ici les fonctions complexes conjuguées telles que $x \to \overline{g_1(x)}$. Pour obtenir la traduction en termes d'algèbres de fonctions, il nous faudra supposer que la fonction $\overline{g}$ est encore dans $\mathcal{A}$, pour toute $g \in \mathcal{A}$.

Théorème (Stone-Weierstrass, cas complexe). *On suppose que* X *est un espace topologique compact non vide et* $\mathcal{A}$ *une* $\mathbb{C}$*-algèbre de fonctions continues sur* X*, qui sépare les points de* X*, contient les fonctions constantes,* et qui de plus est stable par conjugaison complexe. *L'algèbre* $\mathcal{A}$ *est dense dans* $\mathrm{C}_\mathbb{C}(\mathrm{X})$*, pour la norme uniforme.*

Remarque 3. Il n'est pas extrêmement difficile de montrer que toute fonction réelle continue sur $\mathbb{R}^d$, à support dans un compact K de $\mathbb{R}^d$, peut être approchée uniformément sur K par une fonction de la forme

$$y \in \mathbb{R}^d \to \sup\bigl(a_1(y), \ldots, a_\mathrm{M}(y)\bigr) - \sup\bigl(b_1(y), \ldots, b_\mathrm{N}(y)\bigr)$$

où les fonctions a_i, b_j sont des fonctions affines sur $\mathbb{R}^d$. Si à la fin de la preuve du théorème 1, on remplace l'emploi du théorème de Weierstrass classique par cette nouvelle information, on obtient la version réticulée de Stone-Weierstrass : si E est un espace vectoriel de fonctions réelles continues sur le compact X, qui est stable par sup fini, contient les constantes et sépare les points de X, alors E est dense dans $\mathrm{C}_\mathbb{R}(\mathrm{X})$.

Notes.

([a]) Pour ceux qui préfèrent partir du début, présentons une variante «self-contained» de l'argument. On se donne une fonction f continue sur $\mathbb{R}$, à support dans l'intervalle $[-1,1]$; pour simplifier les écritures, on supposera que $\|f\|_\infty \le 1$. On va chercher à approcher f, uniformément sur $[-1,1]$, par des fonctions polynomiales. On donne $\varepsilon > 0$ et on peut lui associer, puisque f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, un δ tel que $0 < \delta < 1$ et tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/4$ dès que $|x - y| < \delta$. On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi t^2}\, dt = 1$, et on choisit $a > 0$ tel que

$$\int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-\pi t^2}\, dt > 1 - \varepsilon/8.$$

On pose $b = 2a/\delta > a$ et on introduit les fonctions polynomiales (P_n) qui sont les sommes partielles de la série exponentielle,

$$\mathrm{P}_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-\pi t^2)^k}{k!}\,\cdot$$

Puisque $\mathrm{P}_n(t)$ tend uniformément vers $\mathrm{e}^{-\pi t^2}$ quand $t \in [-b, b]$, on aura pour n assez grand les propriétés suivantes : $\mathrm{P}_n(t) > 0$ pour tout $t \in [-b, b]$ et

$$1 - \varepsilon/8 < \int_{-a}^{a} \mathrm{P}_n(t)\, dt < \int_{-b}^{b} \mathrm{P}_n(t)\, dt < 1.$$

Posons $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{n_0}$ pour un n_0 vérifiant les conditions précédentes, et posons pour tout $x \in [-1,1]$

$$h(x) = \int_{-b}^{b} \mathrm{P}(t) f(x - \delta t/a)\, dt.$$

Posons $\mu = \int_{-b}^{b} \mathrm{P}(t)\, dt$; on sait que $0 < 1 - \mu < \varepsilon/8$; on voit que

$$\mu f(x) - h(x) = \int_{-b}^{b} \mathrm{P}(t)(f(x) - f(x - \delta t/a))\, dt$$

$$= \int_{-a}^{a} \mathrm{P}(t)(f(x) - f(x - \delta t/a))\, dt + \int_{a<|t|<b} \mathrm{P}(t)(f(x) - f(x - \delta t/a))\, dt.$$

Dans la première intégrale, on a $|t| \le a$, donc les points x et $x - \delta t/a$ sont distants de moins de δ et la différence $f(x) - f(x - \delta t/a)$ est majorée par $\varepsilon/4$; dans la deuxième, on majore simplement cette différence par $2\,\|f\|_\infty \le 2$. On obtient

$$|\mu f(x) - h(x)| \le (\varepsilon/4) \int_{-a}^{a} \mathrm{P}(t)\, dt + 2 \int_{a<|t|<b} \mathrm{P}(t)\, dt < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2\,;$$

d'autre part, $|f(x) - \mu f(x)| \le (1 - \mu)\,\|f\|_\infty < \varepsilon/2$ et finalement

$$\|f - h\|_\infty < \varepsilon,$$

montrant que la fonction h approche la fonction f uniformément sur $\mathbb{R}$. On va prouver pour terminer que la fonction h est polynomiale sur l'intervalle $[-1,1]$; par le changement de variable $y = x - \delta t/a$ on obtient puisque $\delta b/a = 2$, et en posant $c = a/\delta$ pour alléger

$$h(x) = c \int_{x-2}^{x+2} \mathrm{P}(c(x-y))\, f(y)\, dy = c \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{-2 \le y-x \le 2\}}\, \mathrm{P}(c(x-y))\, f(y)\, dy.$$

Comme f est à support dans $[-1,1]$, l'intégrale se limite aux valeurs de y telles que $|y| \le 1$. Mais lorsque $|x| \le 1$ et $|y| \le 1$ on a $|y-x| \le 2$, donc

$$\forall x \in [-1,1], \quad h(x) = c \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(c(x-y))\, f(y)\, dy.$$

Il suffit de dire maintenant que l'expression $c\,\mathrm{P}(c(x-y))$ peut être développée sous la forme $c\,\mathrm{P}(c(x-y)) = \sum_k \mathrm{Q}_k(y)\, x^k$ pour obtenir

$$\forall x \in [-1,1], \quad h(x) = \sum_k \Bigl(\int_{-1}^{1} \mathrm{Q}_k(y)\, f(y)\, dy \Bigr) x^k,$$

une fonction polynomiale en x.

(b) Si on veut prouver sérieusement cette affirmation, on peut procéder par récurrence :

$$g_{n+1}(x-y) = \frac{c_{n+1}}{c_n}\, (1 - x^2/4 + xy/2 - y^2/4)\, g_n(x,y)$$

et par l'hypothèse de récurrence on sait que

$$g_n(x-y) = \sum_{k=0}^{2n} \mathrm{P}_{n,k}(y)\, x^k.$$

Il est facile de montrer que le produit ci-dessus est de la forme voulue.

(c) Considérons la fonction triangle T égale à $1 - |x|$ pour $|x| \le 1$ et 0 sinon. On voit facilement que

$$(*) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{T}(x-n) = 1.$$

Si $a > 0$ et si on pose $\varphi_a(x) = \mathrm{T}(x/a)$, on obtiendra $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_a(x - na) = 1$, avec des fonctions de support arbitrairement petit (support de longueur $2a$). Une méthode générale pour obtenir la relation $(*)$ est la suivante : on part d'une fonction ψ nulle hors de $[-a,a]$, de carré sommable, d'intégrale 1 et on pose pour un $b > 0$

$$\chi(x) = \psi(x+b) - \psi(x-b).$$

Il est clair que χ est nulle hors de $[-a-b, a+b]$, et χ est d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}$. On pose ensuite

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} \chi(t)\, dt.$$

On voit que φ est continue, à support dans $[-a-b, a+b]$. Maintenant,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(x-2nb) = 1.$$

Cette série de fonctions est *localement finie*, c'est-à-dire que tout point possède un voisinage dans lequel un nombre fini seulement de ces fonctions est non nul. Il est clair que la somme est constante, par le calcul de la dérivée, mais la valeur de la constante est moins évidente ; calculons-la avec une normalisation qui nous est plus familière, en posant $b=\pi$. La formule de Poisson nous dit que pour toute fonction raisonnable f sur $\mathbb{R}$, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2n\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n).$$

Puisque χ est la dérivée de φ, on a $\widehat{\chi}(y) = \mathrm{i}y\widehat{\varphi}(y)$, donc

$$\frac{1}{2\pi}\widehat{\varphi}(y) = \frac{2\mathrm{i}\sin(\pi y)}{2\mathrm{i}\pi y}\widehat{\psi}(y) = \frac{\sin(\pi y)}{\pi y}\widehat{\psi}(y)$$

où $\sin(\pi y)/(\pi y)$ est interprété comme valant 1 quand $y=0$; si x est fixé et si on pose $f(u) = \varphi(u+x)$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(x+2n\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2n\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xn} \frac{\sin(\pi n)}{\pi n}\widehat{\psi}(n)$$

où seul le terme $n=0$ est non nul,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2n\pi) = \widehat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\,dx = 1.$$

(d) On sait que $0 \le \varphi_i(x_1) \le 1$; si $|\mathrm{P}_i(x_1) - \varphi_i(x_1)| < \eta$ pour tout $x_1 \in [-a, a]$, il en résulte que $|\mathrm{P}_i(x_1)| < 1+\eta$; ensuite,

$$|\varphi_i(x_1)\varphi_j(x_2) - \mathrm{P}_i(x_1)\mathrm{P}_j(x_2)| = |(\varphi_i(x_1) - \mathrm{P}_i(x_1))\varphi_j(x_2) + \mathrm{P}_i(x_1)(\varphi_j(x_2) - \mathrm{P}_j(x_2))|$$

qui est $\le \eta + (1+\eta)\eta$.

(e) Posons pour chaque α et $x \in \mathrm{K}_1$

$$\psi_\alpha(x) = d(x, \mathrm{U}_\alpha^c).$$

Il est clair que ψ_α est continue, >0 sur U_α et nulle hors de U_α. La somme $\psi = \sum_\alpha \psi_\alpha$ est >0 en tout point de K_1 puisque les U_α recouvrent K_1. On pose alors

$$\varphi_\alpha(x) = \psi_\alpha(x)/\psi(x).$$