Théorèmes d'Ascoli, de Peano et de Schauder

Précompacité

Si (X, d) est un espace métrique, si $x \in \mathrm{X}$ et $r > 0$, on notera

$$\mathrm{B}(x, r) = \{y \in \mathrm{X} : d(y, x) < r\}$$

la boule ouverte de centre x et de rayon r.

Définition. Une partie A d'un espace métrique (X, d) est *précompacte* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_n$ dans X tels que

$$\mathrm{A} \subset \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{B}(x_j, \varepsilon).$$

Quitte à remplacer ε par 2ε, on peut supposer que les centres des boules sont des points $a_1, \ldots, a_n$ de A : si la boule $\mathrm{B}(x_j, \varepsilon)$ ci-dessus rencontre A en a_j, elle est contenue dans $\mathrm{B}(a_j, 2\varepsilon)$, donc A est recouvert par des boules $\mathrm{B}(a_j, 2\varepsilon)$ en nombre fini, et centrées en des points de A.

Il est clair que si A est précompact, les sous-ensembles de A sont précompacts ; de plus, l'adhérence $\overline{\mathrm{A}}$ de A dans X est précompacte aussi : si A est recouvert par les boules $\mathrm{B}(x_1, \varepsilon)$, …, $\mathrm{B}(x_n, \varepsilon)$, il est clair que $\overline{\mathrm{A}}$ est recouvert par les boules $\mathrm{B}(x_j, \varepsilon + \varepsilon')$ pour tout $\varepsilon' > 0$.

Le résultat essentiel sur la précompacité est le théorème qui suit.

Théorème 1. *Une partie* A *de l'espace métrique* complet (X, d) *est précompacte si et seulement si son adhérence* $\overline{\mathrm{A}}$ *dans* X *est compacte.*

Preuve. — Une des deux directions est facile et n'apporte rien de nouveau : si l'adhérence $\overline{\mathrm{A}}$ est compacte et si $\varepsilon > 0$, on peut extraire du recouvrement ouvert de $\overline{\mathrm{A}}$ par les boules $\mathrm{B}(x, \varepsilon)$, où x varie dans X, un sous-recouvrement fini, donc $\overline{\mathrm{A}}$ est précompact et A aussi.

L'implication inverse peut se montrer par l'argument classique de *dichotomie*, qui est apparu (dans le contexte des débuts de la notion de compacité) chez Pierre Cousin([a]) en 1894. Supposons A précompacte, ce qui entraîne que $\overline{\mathrm{A}}$ est un fermé précompact. Commençons par une remarque évidente.

Remarque : si F est un fermé précompact de X et si ε est > 0, l'ensemble F est réunion d'un nombre fini([b]) de sous-ensembles fermés de diamètre $\le \varepsilon$.

Donnons nous un recouvrement ouvert $(\mathrm{U}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ du fermé précompact $\mathrm{F}_0 = \overline{\mathrm{A}}$, et supposons par l'absurde qu'il n'existe pas de sous-recouvrement fini de $\overline{\mathrm{A}}$. Si on recouvre $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{F}_0$ par un nombre fini de sous-ensembles $\mathrm{G}_1, \ldots, \mathrm{G}_\mathrm{N}$, il est clair que l'un d'entre eux, disons G_{j_0}, n'admettra pas non plus de sous-recouvrement fini. D'après la remarque, on peut supposer que les G_j sont des sous-ensembles fermés de diamètre $\le 1/2$; on peut donc trouver un sous-ensemble fermé $\mathrm{F}_1 = \mathrm{G}_{j_0}$ de F_0, de diamètre $\le 1/2$, qui ne peut être couvert par aucune sous-famille *finie* des ouverts donnés $(\mathrm{U}_i)_{i \in \mathrm{I}}$.

En raisonnant sur F_1 comme on a fait sur F_0, on peut trouver un fermé $\mathrm{F}_2 \subset \mathrm{F}_1$, de diamètre $\leq 1/4$, et qui n'admet pas de sous-recouvrement fini ; par récurrence, on construira une suite décroissante de fermés (F_n), avec F_n de diamètre $\leq 2^{-n}$ et qui n'admet pas de sous-recouvrement fini. Puisque X est complet, l'intersection de cette suite de fermés est non vide, c'est un singleton $\{x_0\}$ avec $x_0 \in \overline{\mathrm{A}}$. D'après l'hypothèse, ce point x_0 est contenu dans l'un des ouverts donnés qui recouvrent $\overline{\mathrm{A}}$, disons $x_0 \in \mathrm{U}_{j_0}$. Il est clair qu'on aura maintenant $\mathrm{F}_n \subset \mathrm{U}_{j_0}$ pour n assez grand, ce qui contredit le fait que F_n n'admettait pas de sous-recouvrement fini. On a ainsi montré que tout recouvrement ouvert de $\overline{\mathrm{A}}$ admet un sous-recouvrement fini, donc $\overline{\mathrm{A}}$ est compact.

Théorème d'Ascoli

Le théorème d'Ascoli sera énoncé d'une façon un peu plus générale que d'habitude (cet énoncé se trouve dans des livres respectables ; peut-être pas dans les livres respectables mais raisonnables, comme celui de Hirsch et Lacombe).

Théorème d'Ascoli. *Soient* K *un espace topologique compact,* E *un espace de Banach et* A *un sous-ensemble de l'espace* $\mathrm{C}(\mathrm{K},\mathrm{E})$ *des fonctions continues de* K *dans* E *; l'ensemble* A *est relativement compact dans* $\mathrm{C}(\mathrm{K},\mathrm{E})$ *si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :*

— pour tout $x \in \mathrm{K}$, l'ensemble des valeurs $\{f(x) : f \in \mathrm{A}\}$ est relativement compact dans E *;*

— l'ensemble A *est équicontinu : pour tout $x \in \mathrm{K}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage* V *de x dans* K *tel que*

$$\forall f \in \mathrm{A},\ \forall y \in \mathrm{V}, \quad \|f(y) - f(x)\|_{\mathrm{E}} < \varepsilon.$$

Preuve. — Montrons d'abord que A est relativement compact quand il vérifie les deux conditions du théorème. Puisque $\mathrm{C}(\mathrm{K},\mathrm{E})$ est un espace de Banach pour la norme de la convergence uniforme, définie par

$$\|f\| = \max\{\|f(x)\|_{\mathrm{E}} : x \in \mathrm{K}\},$$

il suffit de montrer que A est précompact. Soit $\varepsilon > 0$ donné ; en utilisant la compacité de K et l'équicontinuité de l'ensemble A, on peut trouver un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_m$ de K et des ouverts $\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_m$ de K qui recouvrent K, tels que pour chaque $i = 1, \ldots, m$ on ait $x_i \in \mathrm{V}_i$ et

$$\forall f \in \mathrm{A},\ \forall y \in \mathrm{V}_i, \quad \|f(y) - f(x_i)\|_{\mathrm{E}} < \varepsilon/3. \tag{1}$$

D'après l'hypothèse, pour chaque $i = 1, \ldots, m$, l'ensemble des valeurs $f(x_i)$, $f \in \mathrm{A}$, est contenu dans un compact Y_i contenu dans E. Le produit $\mathrm{Y} = \mathrm{Y}_1 \times \ldots \times \mathrm{Y}_m$ est un compact contenu dans E^m ; on munira E^m de la norme du sup,

$$\|(e_1, \ldots, e_m)\|_{\mathrm{E}^m} = \max_{i=1,\ldots,m} \|e_i\|_{\mathrm{E}}.$$

L'ensemble

$$\mathrm{P} = \{p(f) = (f(x_1), \ldots, f(x_m)) \in \mathrm{E}^m : f \in \mathrm{A}\}$$

est un sous-ensemble du compact Y, donc il est précompact. On peut donc trouver un nombre fini de points $p(f_1), \ldots, p(f_n)$ dans P (avec naturellement $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{A}$) tels que les boules de rayon $\varepsilon/3$ centrées en ces points couvrent P : pour toute $f \in \mathrm{A}$, il existe un indice j tel que $1 \le j \le n$ et

$$(2) \qquad \|p(f) - p(f_j)\|_{\mathrm{E}^m} = \sup_{i=1,\ldots,m} \|f(x_i) - f_j(x_i)\|_{\mathrm{E}} < \varepsilon/3.$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que A est recouvert par les boules de rayon ε centrées aux points $f_1, \ldots, f_n$ de A. Soit $f \in \mathrm{A}$ quelconque ; il existe un indice j tel que $1 \le j \le n$ et que $\|p(f) - p(f_j)\|_{\mathrm{E}^m} < \varepsilon/3$. Mais par ailleurs, si x est un point quelconque de K, il est contenu dans l'un des ouverts V_i et on a d'après (1)

$$\|f(x) - f(x_i)\|_{\mathrm{E}} < \varepsilon/3, \quad \|f_j(x) - f_j(x_i)\|_{\mathrm{E}} < \varepsilon/3,$$

et l'équation (2) donne en particulier, pour la coordonnée i du produit E^m

$$\|f(x_i) - f_j(x_i)\|_{\mathrm{E}} < \varepsilon/3\,;$$

il en résulte que $\|f(x) - f_j(x)\|_{\mathrm{E}} < \varepsilon$, pour tout $x \in \mathrm{K}$, c'est-à-dire que $\|f - f_j\| < \varepsilon$. On a bien montré que A est couvert par les boules $\mathrm{B}(f_j, \varepsilon)$, en nombre fini ; ceci étant possible pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que A est précompact, donc relativement compact dans l'espace de Banach $\mathrm{C}(\mathrm{K}, \mathrm{E})$.

L'implication inverse dans le théorème est plus facile à montrer, et aussi moins utile. Considérons l'adhérence $\overline{\mathrm{A}}$ de A dans $\mathrm{C}(\mathrm{K}, \mathrm{E})$, supposée compacte. Pour chaque $x \in \mathrm{K}$, l'application $f \in \overline{\mathrm{A}} \to f(x)$ est continue à valeurs dans E, donc son image est un compact de E, et ce compact contient l'ensemble $\{f(x) : f \in \mathrm{A}\}$ qui est donc relativement compact dans E : c'est la première condition du théorème. De plus on peut trouver un nombre fini $f_1, \ldots, f_q$ de fonctions dans $\overline{\mathrm{A}}$ tel que les boules de rayon $\varepsilon/3$ centrées en ces points couvrent $\overline{\mathrm{A}}$, et ensuite pour tout point x on peut trouver (par continuité de chaque f_j, et intersection finie de voisinages) un voisinage V de x dans K tel que

$$\forall j = 1, \ldots, q, \ \forall y \in \mathrm{V}, \quad \|f_j(y) - f_j(x)\|_{\mathrm{E}} < \varepsilon/3.$$

Pour toute fonction $f \in \mathrm{A}$ il existe un indice j tel que $\|f - f_j\| < \varepsilon/3$, ce qui implique $\|f(y) - f_j(y)\|_{\mathrm{E}} < \varepsilon/3$ pour tout $y \in \mathrm{V}$ et en particulier $\|f(x) - f_j(x)\|_{\mathrm{E}} < \varepsilon/3$; par l'inégalité triangulaire on obtient l'équicontinuité de A,

$$\forall f \in \mathrm{A}, \ \forall y \in \mathrm{V}, \quad \|f(y) - f(x)\|_{\mathrm{E}} < \varepsilon.$$

Remarque peu sérieuse. On n'a pas encore atteint le pire degré de l'horreur abstraite. On pourrait encore remplacer l'espace de Banach E par un espace métrique complet (E, D). Dans ce cas l'espace $\mathrm{C}(\mathrm{K}, \mathrm{E})$ est un espace métrique complet, muni de la distance

$$d(f, g) = \max\{\mathrm{D}(f(x), g(x)) : x \in \mathrm{K}\}.$$

À ce détail près, la preuve est la même. En plus, on pourrait dire que ce cas n'est même pas plus général que celui du théorème qu'on a montré, car tout espace métrique (E, D) peut se plonger isométriquement dans le dual F' de l'espace de Banach F des fonctions lipschitziennes sur E, muni de la norme de Lipschitz suivante : on fixe $x_0 \in \mathrm{E}$ et on pose

$$\forall f, g \in \mathrm{F}, \quad \|f - g\|_{\mathrm{F}} = |f(x_0) - g(x_0)| + \sup\{|f(x) - f(y)|/\mathrm{D}(x, y) : x, y \in \mathrm{E}, \ x \neq y\}.$$

À chaque $x \in \mathrm{E}$ on associe la forme linéaire $\ell_x \in \mathrm{F}'$ définie sur F par $\ell_x(f) = f(x)$; il est clair par définition que $\|\ell_x - \ell_y\| \le \mathrm{D}(x, y)$, et le maximum $\mathrm{D}(x, y)$ est atteint si on applique $\ell_x - \ell_y$ à la fonction $f_x \in \mathrm{F}$ de norme un définie par $f_x(z) = \mathrm{D}(z, x) - \mathrm{D}(x, x_0)$ (ou si on l'applique à f_y).

Corollaire. *Soient* K *un espace topologique compact et* A *un sous-ensemble de l'espace* $\mathrm{C}(\mathrm{K}, \mathbb{R}^d)$ *des fonctions continues de* K *dans* $\mathbb{R}^d$ *; l'ensemble* A *est relativement compact dans* $\mathrm{C}(\mathrm{K}, \mathbb{R}^d)$ *si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :*

— *pour tout* $x \in \mathrm{K}$*, l'ensemble des valeurs* $\{f(x) : f \in \mathrm{A}\}$ *est borné dans* $\mathbb{R}^d$ *;*

— *l'ensemble* A *est équicontinu : pour tout* $x \in \mathrm{K}$ *et tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un voisinage* V *de* x *dans* K *tel que*

$$\forall f \in \mathrm{A},\ \forall y \in \mathrm{V}, \quad \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon.$$

Preuve. — Dans l'espace de dimension finie $\mathbb{R}^d$, les bornés sont relativement compacts.

Théorème de Peano

Le théorème de Peano garantit l'existence de solutions pour des équations différentielles de la forme $y' = f(y)$ où la fonction f est simplement supposée *continue*. Le cas des valeurs réelles est le cas le plus intéressant, mais comme nous sommes prétentieux, nous démontrerons aussi le cas des valeurs vectorielles. Pour régler ce cas, on a besoin du lemme technique qui suit. On notera bien que dans le cas fondamental où $d = n = 1$ et où K est un intervalle fermé borné $[a, b]$, le lemme 1 est extrêmement simple : il suffit d'approcher f continue sur $[a, b]$ par une fonction g affine par morceaux sur $[a, b]$, qu'on prolonge à $\mathbb{R}$ en posant $g(x) = g(a)$ pour $x \le a$ et $g(x) = g(b)$ pour $x \ge b$.

Lemme 1. *Si* f *est une fonction continue d'un compact* K *de* $\mathbb{R}^d$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$*, il existe pour tout* $\varepsilon > 0$ *une fonction* g *de* $\mathbb{R}^d$ *dans* $\mathbb{R}^n$*, lipschitzienne et telle que* $\sup\{\|g(x)\| : x \in \mathbb{R}^d\} \le \max\{\|f(y)\| : y \in \mathrm{K}\}$*, proche de* f *sur* K *:*

$$\forall y \in \mathrm{K}, \quad \|f(y) - g(y)\| \le \varepsilon.$$

Théorème de Peano. *On suppose donnés un point* $y_0 \in \mathbb{R}^d$ *et* $r > 0$*, on considère le compact* K *égal à l'adhérence de la boule* $\mathrm{B}(y_0, r)$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *et une fonction* f *continue de* K *dans* $\mathbb{R}^d$ *; on pose*

$$\mathrm{M}_r = \max\{\|f(y)\| : \|y - y_0\| \le r\}.$$

Il existe une fonction $t \to y(t)$ *de classe* C^1 *de* $[0, r/\mathrm{M}_r]$ *dans* K *telle que*

$$y(0) = y_0 \ \text{ et } \ y'(t) = f(y(t))$$

pour tout $t \in [0, r/\mathrm{M}_r]$.

Preuve du théorème. — Par le lemme 1 on approche f, uniformément sur $\mathrm{K} = \overline{\mathrm{B}(y_0, r)}$, par des fonctions lipschitziennes f_n sur $\mathbb{R}^d$ telles que $\|f_n(x)\| \le \mathrm{M}_r$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. D'après la théorie classique des équations différentielles dans le cas *globalement* lipschitzien([c]), pour chaque n on peut trouver une fonction y_n définie sur l'intervalle fermé $\mathrm{I} = [0, r/\mathrm{M}_r]$ telle que

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad y_n(t) = y_0 + \int_0^t f_n(y_n(s))\,\mathrm{d}s.$$

Comme les valeurs $f_n(y)$ sont majorées en norme par M_r, on voit que pour tous $s, t \in \mathrm{I}$

$$(3) \qquad \|y_n(t) - y_n(s)\| = \Bigl\| \int_s^t f_n(y_n(u))\,\mathrm{d}u \Bigr\| \le \mathrm{M}_r\,|t - s|.$$

En particulier, $\|y_n(t) - y_0\| \le (r/\mathrm{M}_r)\mathrm{M}_r = r$, ce qui prouve que les fonctions (y_n) sont à valeurs dans K, et l'inégalité (3) entraîne que la suite (y_n) est équicontinue. D'après Ascoli, on peut trouver une sous-suite (y_{n_k}) qui converge uniformément sur I vers une fonction y de I dans K. On note que pour tout $s \in \mathrm{I}$

$$\|f_{n_k}(y_{n_k}(s)) - f(y_{n_k}(s))\| \le \|f_{n_k} - f\|$$

tend vers 0 quand k tend vers l'infini ; comme la fonction f est continue, on déduit que $f_{n_k}(y_{n_k}(s)) - f(y(s))$ tend vers 0, et en restant dominé en norme par $2\mathrm{M}_r$. Il en résulte par le théorème de convergence dominée que

$$\Bigl\|\int_0^t f_{n_k}(y_{n_k}(s))\,\mathrm{d}s - \int_0^t f(y(s))\,\mathrm{d}s\Bigr\| \le \int_0^t \bigl\|f_{n_k}(y_{n_k}(s)) - f(y(s))\bigr\|\,\mathrm{d}s \to 0$$

quand k tend vers l'infini, donc

$$y_0 + \int_0^t f(y(s))\,\mathrm{d}s = \lim_k y_{n_k}(t) = y(t),$$

ce qui montre que y est solution de l'équation $y' = f(y)$.

Non unicité des solutions

Le théorème de Peano est un théorème d'existence *sans unicité*. On va rappeler un exemple classique de non unicité, et constater qu'il s'inscrit dans le cadre du théorème de Peano. Considérons la fonction continue f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sqrt{|x|}$, et l'équation différentielle associée

$$\text{(E)} \qquad y'(t) = 2\sqrt{|y(t)|}.$$

La fonction f est lipschitzienne au voisinage de tout x non nul, mais pas au voisinage de $x = 0$. Ceci permet à une solution de partir de $y(0) = y_0 = 0$ et de décoller de l'axe, alors que la fonction constante $y = 0$ est aussi solution, avec la même condition initiale. Par exemple, la fonction $y(t) = 0$ pour $t \le 0$ et $y(t) = t^2$ pour $t \ge 0$ est solution de (E).

Il est possible de trouver toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation : pour tous $u \le v$, il existe une solution $y_{u,v}(t)$ égale à $-(u-t)^2$ pour $t \le u$, $y_{u,v}(t) = 0$ si $u \le t \le v$ et $y_{u,v}(t) = (t-v)^2$ si $t \ge v$; les cas $u = -\infty$ ou $v = +\infty$ sont possibles ; quand $u = -\infty$ *et* $v = +\infty$, on obtient la solution nulle.

Preuve du lemme 1. — On se donne $\varepsilon > 0$; par continuité uniforme de f sur le compact K, il existe $\delta > 0$ tel que $\|f(y) - f(z)\| < \varepsilon$ quand $y, z \in \mathrm{K}$ et $\|y - z\| < \delta$. Par la compacité de K on peut trouver un nombre fini de points $y_1, \ldots, y_\mathrm{N}$ dans K tels que les ouverts $\mathrm{U}_j = \mathrm{B}(y_j, \delta)$, $j = 1, \ldots, \mathrm{N}$ couvrent K. On ajoute l'ouvert $\mathrm{U}_0 = \mathrm{K}^c$ (complémentaire de K) pour couvrir tout $\mathbb{R}^d$. Pour chaque $j = 0, \ldots, \mathrm{N}$ on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \psi_j(x) = \mathrm{dist}(x, \mathrm{U}_j^c) = \inf\{\|x - v\| : v \in \mathrm{U}_j^c\}.$$

Ces fonctions sont ≥ 0, lipschitziennes de constante 1 et

$$\psi(x) = \sum_{j=0}^{\mathrm{N}} \psi_j(x)$$

est > 0 sur $\mathbb{R}^d$ parce que les ouverts recouvrent $\mathbb{R}^d$. De plus, la fonction ψ_0 est la distance à K et elle tend donc vers $+\infty$ à l'infini, ce qui entraîne la même conclusion pour $\psi \geq \psi_0$. Il en résulte que ψ atteint son minimum sur $\mathbb{R}^d$, et ce minimum m est donc > 0. On en déduit facilement (d) que les fonctions $\varphi_j = \psi_j/\psi$ sont lipschitziennes de constante $(\mathrm{N}+2)/m$, et elles forment une partition de l'unité, $\sum_{j=0}^{\mathrm{N}} \varphi_j(x) = 1$ pour tout x de $\mathbb{R}^d$. Posons

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad g(x) = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \varphi_j(x) f(y_j).$$

Il est clair que la fonction g est lipschitzienne (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a en posant $\mathrm{M} = \max\{\|f(y)\| : y \in \mathrm{K}\}$

$$\|g(x)\| \leq \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \varphi_j(x) \|f(y_j)\| \leq \mathrm{M} \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \varphi_j(x) \leq \mathrm{M}.$$

Si y est dans K, on a $\varphi_0(y) = 0$ donc $\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \varphi_j(y) = 1$,

$$f(y) = \Big(\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \varphi_j(y)\Big) f(y)$$

et

$$f(y) - g(y) = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \varphi_j(y)(f(y) - f(y_j)).$$

Pour chaque terme $\varphi_j(y)(f(y) - f(y_j))$, ou bien $\varphi_j(y) = 0$, ou bien $\varphi_j(y) > 0$ implique $y \in \mathrm{U}_j$ et $\|f(y) - f(y_j)\| < \varepsilon$; dans tous les cas on a $\varphi_j(y)\|f(y) - f(y_j)\| \leq \varepsilon \varphi_j(y)$, donc

$$\forall y \in \mathrm{K}, \quad \|f(y) - g(y)\| \leq \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \varepsilon \varphi_j(y) = \varepsilon.$$

De Brouwer à Schauder

Le théorème de Schauder est un théorème de point fixe pour les applications continues d'un convexe compact d'un espace de Banach dans lui-même. Le théorème de Brouwer donne le cas des convexes en dimension finie, et il suffit pour démontrer Schauder de se ramener à la dimension finie. C'est l'objet du lemme 2.

Ce lemme 2 est essentiellement contenu dans la preuve du lemme 1, et on aurait pu donner un énoncé plus général qui contienne les deux lemmes. On ne l'a pas fait pour ne pas faire peur au lecteur, mais du coup on va devoir répéter une partie de la preuve du lemme 1. On accélérera tout de même un peu dans les passages déjà vus.

Lemme 2. *Si f est une fonction continue d'un compact métrique* K *à valeurs dans un convexe* C *d'un espace de Banach* E*, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un sous-espace de dimension finie F_ε de* E *et une fonction g de* K *dans $\mathrm{F}_\varepsilon \cap \mathrm{C}$, proche de f sur* K *:*

$$\max_{x \in \mathrm{K}} \|f(x) - g(x)\|_{\mathrm{E}} \leq \varepsilon.$$

Preuve du lemme 2. — On se donne $\varepsilon > 0$; par continuité uniforme de f sur le compact K, il existe $\delta > 0$ tel que $\|f(x) - f(y)\|_{\mathrm{E}} < \varepsilon$ quand $x, y \in \mathrm{K}$ et $d(x, y) < \delta$. Par la compacité de K on peut trouver un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_{\mathrm{N}}$ dans K tels que les ouverts $\mathrm{U}_j = \mathrm{B}(x_j, \delta)$, $j = 1, \ldots, \mathrm{N}$ couvrent K. Pour chaque $j = 1, \ldots, \mathrm{N}$ on pose

$$\forall x \in \mathrm{K}, \quad \psi_j(x) = \mathrm{dist}(x, \mathrm{U}_j^c).$$

Ces fonctions sont continues ≥ 0 et $\psi = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \psi_j$ est > 0 sur K parce que les ouverts (U_j) recouvrent K. On en déduit que les fonctions $\varphi_j = \psi_j / \psi$ forment une partition continue de l'unité, $\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \varphi_j(x) = 1$ pour tout $x \in \mathrm{K}$. Posons

$$\forall x \in \mathrm{K}, \quad g(x) = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \varphi_j(x) f(x_j) \in \mathrm{conv}(f(x_1), \ldots, f(x_{\mathrm{N}})) \subset \mathrm{C}.$$

La fonction g est donc à valeurs dans le convexe C où f prend ses valeurs, et elle est aussi à valeurs dans le sous-espace de dimension finie $\mathrm{F}_\varepsilon = \mathrm{Vect}(f(x_1), \ldots, f(x_{\mathrm{N}}))$ de E. On voit comme avant que pour tout $x \in \mathrm{K}$

$$f(x) - g(x) = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \varphi_j(x)(f(x) - f(x_j)),$$

et que pour chaque $j = 1, \ldots, \mathrm{N}$ on a $\varphi_j(x) \|f(x) - f(x_j)\| \leq \varepsilon \varphi_j(x)$, donc

$$\forall x \in \mathrm{K}, \quad \|f(x) - g(x)\|_{\mathrm{E}} \leq \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \varepsilon \varphi_j(x) = \varepsilon.$$

Théorème de Brouwer. *Soient* C *un sous-ensemble convexe et compact d'un espace vectoriel réel de dimension finie et* f *une application continue de* C *dans lui-même ; l'application* f *admet un point fixe.*

C'est ce théorème de Brouwer qui est profond, et que nous admettrons. Il est évident que le théorème reste valable pour tout ensemble homéomorphe à un convexe compact de dimension finie. Comme on montre assez facilement que tous les convexes compacts d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^d$ sont homéomorphes, on peut choisir pour prouver Brouwer le convexe le mieux adapté au type de preuve choisi. Il existe des preuves assez combinatoires qui s'expriment bien avec un simplexe, et des preuves avec la formule de Stokes qui se passent bien pour la boule euclidienne.

On va voir que le passage de Brouwer à Schauder n'est pas trop difficile.

Théorème de Schauder. *Soient* C *un convexe compact d'un espace de Banach* E *et* f *une application continue de* C *dans lui-même ; l'application* f *admet un point fixe.*

Preuve. — On applique le lemme 2 avec $\mathrm{C} = \mathrm{K}$: il existe une fonction continue g_ε de C dans un sous-ensemble de la forme $\mathrm{C}_\varepsilon = \mathrm{F}_\varepsilon \cap \mathrm{C}$ telle que $\|f(x) - g_\varepsilon(x)\| \leq \varepsilon$ pour tout x de C ; la restriction h_ε de g_ε à C_ε est une application continue du convexe compact de dimension finie C_ε dans lui-même, donc elle admet un point fixe $x_\varepsilon \in \mathrm{C}_\varepsilon$ par Brouwer, $x_\varepsilon = h_\varepsilon(x_\varepsilon) = g_\varepsilon(x_\varepsilon)$. Il en résulte que

$$\|f(x_\varepsilon) - x_\varepsilon\| = \|f(x_\varepsilon) - g_\varepsilon(x_\varepsilon)\| \leq \varepsilon$$

et on conclut par compacité : le minimum de la fonction continue $x \in \mathrm{C} \to \|f(x) - x\|$ doit être égal à 0, et on sait qu'il est atteint ; ce sera en un point fixe de f.

On reprend le cadre de l'énoncé du théorème de Peano : on se donne une fonction continue f de $\mathrm{K} = \overline{\mathrm{B}(y_0, r)}$ dans $\mathbb{R}^d$, et on désigne par M_r le maximum de $\|f(y)\|$, $y \in \mathrm{K}$. Désignons par C l'ensemble des applications y de $\mathrm{I} = [0, r/\mathrm{M}_r]$ dans $\mathbb{R}^d$ telles que $y(0) = y_0$ et qui sont M_r-lipschitziennes. En particulier,

$$\forall s \in \mathrm{I}, \quad \|y(s) - y_0\| = \|y(s) - y(0)\| \leq \mathrm{M}_r\, s \leq r,$$

ce qui permet d'appliquer f à $y(s)$. Cet ensemble C est compact dans l'espace de Banach $\mathrm{E} = \mathrm{C}(\mathrm{I}, \mathbb{R}^d)$ par Ascoli, et convexe. On définit F en associant à chaque fonction $y \in \mathrm{C}$ la fonction $\mathrm{F}(y)$ définie par

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{F}(y)(t) = y_0 + \int_0^t f(y(s))\,\mathrm{d}s.$$

Il est facile de vérifier que F opère de C dans C, et qu'elle est continue : la fonction f continue sur K est uniformément continue ; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $\delta > 0$ tel que $\|f(x_1) - f(x_2)\| < \varepsilon$ dès que $\|x_1 - x_2\| < \delta$; si y_1, y_2 sont deux éléments de C avec $\|y_1 - y_2\| \leq \delta$, alors

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad \|\mathrm{F}(y_1)(t) - \mathrm{F}(y_2)(t)\| = \left\| \int_0^t \big(f(y_1(s)) - f(y_2(s))\big)\,\mathrm{d}s \right\| \leq \varepsilon r/\mathrm{M}_r.$$

D'après le théorème de Schauder, il existe des points fixes de F, qui sont solutions de l'équation différentielle $y' = f(y)$.

Remarque. Dans le cadre d'une politique d'économie d'énergie mathématique, prouver Peano avec Schauder n'est vraiment pas raisonnable.

Notes

([a]) Cette preuve a un intérêt historique : Pierre Cousin présente le 8 Juin 1894 sa thèse «*Sur les fonctions de n variables complexes*» à la Faculté des Sciences de Paris, et la thèse est ensuite publiée dans Acta Mathematica en 1895 ; cet article est signé par son auteur «*Caen, 28 octobre 1893*», ce qui permet de dater au plus près le travail de Cousin ; on y trouve un lemme qui indique que les fermés bornés du plan ont la propriété de *recouvrement uniforme*, qui est une des formes de la notion de compacité : si on couvre un fermé borné F du plan par des ouverts (U_i), il existe un nombre $\rho > 0$ tel que pour tout point x de F, la boule $\mathrm{B}(x, \rho)$ soit contenue dans l'un des ouverts de la famille donnée (on en déduit facilement l'existence d'un sous-recouvrement fini de F) ; la preuve de Cousin pour ce lemme est celle que nous avons donnée pour le théorème 1.

À une semaine d'intervalle, Émile Borel présente sa thèse *Sur quelques points de la théorie des fonctions* à la Faculté des Sciences de Paris, le 14 Juin 1894 ; Borel a alors 23 ans. La thèse paraît ensuite aux *Annales de l'École Normale Supérieure* en 1895. Borel y prouve une première version du «théorème de Borel-Lebesgue» pour $[0, 1]$, par la stratégie qui consiste à pousser jusqu'à 1 la valeur c telle que $[0, c]$ puisse être couvert par un nombre fini des ouverts donnés. Pour le faire, il utilise la méthode de récurrence transfinie de Cantor ; cette méthode sera remplacée plus tard par l'utilisation de la borne supérieure.

Pour Cousin, il ne s'agit que d'un lemme utile pour son sujet principal d'étude, les fonctions de plusieurs variables complexes ; sa thèse restera pour de nombreuses années l'un des textes les plus importants du sujet. La thèse de Borel parle aussi de fonctions d'une variable complexe, mais Borel creusera l'idée du recouvrement fini dans ses travaux après la thèse, si bien que le lemme deviendra (pour lui peut-être, et en tout cas pour nous) plus important que les (pourtant très jolis) résultats de sa thèse.

(**b**) Il suffit de couvrir F par un nombre fini de boules $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_\mathrm{N}$ de rayon $\varepsilon/2$, et de considérer les N ensembles fermés qui sont les intersections de F avec les adhérences $\overline{\mathrm{B}_j}$ des boules. Ces ensembles fermés couvrent F et sont de diamètre $\leq \varepsilon$.

(**c**) Si f est globalement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^d$, il existe pour toute donnée initiale y_0 une solution $y' = f(y)$ définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et telle que $y(0) = y_0$; en particulier, la résolution est possible sur tout intervalle borné. Pour la preuve de ce résultat, on peut encore invoquer le théorème de point fixe de Picard, mais il est au fond plus simple de montrer directement que la suite des approximations successives

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_0^x f(y_n(t))\,\mathrm{d}t$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

(**d**) Estimons

$$\varphi_j(x) - \varphi_j(y) = \frac{\psi_j(x)}{\psi(x)} - \frac{\psi_j(y)}{\psi(y)} = \frac{\psi_j(x)\psi(y) - \psi_j(y)\psi(x)}{\psi(x)\psi(y)} \;;$$

majorons le numérateur, en notant que chaque ψ_j est 1-lipschitzienne, donc que ψ est $(\mathrm{N}+1)$-lipschitzienne

$$|\psi_j(x)\psi(y) - \psi_j(y)\psi(x)| = \bigl|(\psi_j(x) - \psi_j(y))\psi(y) + \psi_j(y)(\psi(y) - \psi(x))\bigr|$$

$$\leq \psi(y)\,\|y-x\| + (\mathrm{N}+1)\,\psi_j(y)\,\|y-x\| \leq (\mathrm{N}+2)\,\psi(y)\,\|y-x\|$$

et pour finir

$$|\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| \leq (\mathrm{N}+2)\,\|y-x\|/\psi(x) \leq (\mathrm{N}+2)\,m^{-1}\,\|y-x\|.$$