Exercice 1. Si $u_i \geq 0$ pour tout $i \in \mathrm{I}$ et si la somme $\sum_{i \in \mathrm{I}} u_i$ est finie, montrer que l'ensemble I_0 des indices i tels que $u_i > 0$ est fini ou dénombrable.

Exercice 2. Montrer que pour toute suite croissante de mesures positives (μ_n) sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$, la limite $\mathrm{A} \in \mathcal{A} \to \mu(\mathrm{A}) = \lim_n \mu_n(\mathrm{A})$ est une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Montrer que pour toute suite de mesures positives (ν_k) sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$, la formule

$$\mathrm{A} \in \mathcal{A} \to \nu(\mathrm{A}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \nu_k(\mathrm{A})$$

définit une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Exercice 3. Si f est une fonction mesurable ≥ 0, montrer que $\int f \,\mathrm{d}\mu = 0$ si et seulement si $\mu(\{f > 0\}) = 0$.

Montrer que si $\int f \,\mathrm{d}\mu < \infty$, alors $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$.

Exercice 4. Soit f une fonction mesurable sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (muni de sa tribu borélienne) ; on suppose que f est intégrable par rapport à une mesure positive μ sur (Ω, μ). Si on a $\int_{\mathrm{A}} f \,\mathrm{d}\mu \geq 0$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, montrer que f est ≥ 0 μ-presque partout.

Exercice 5. On suppose que μ est une mesure ≥ 0 sur $(\mathrm{X}, \mathcal{A})$ et f une fonction $\mathcal{A}$-mesurable ≥ 0 ; montrer que la formule

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \nu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} f \,\mathrm{d}\mu = \int \mathbf{1}_{\mathrm{A}} f \,\mathrm{d}\mu$$

définit une mesure positive ν sur $(\mathrm{X}, \mathcal{A})$.

Exercice 6. Calculer

$$\int_0^1 \frac{\ln(1/x)}{1-x} \,\mathrm{d}x.$$

Exercice 7. Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt} \,\mathrm{d}x.$$

a. Montrer que $\widehat{f}$ est bornée, continue, et tend vers 0 à l'infini.

b. Montrer que si $\int_{\mathbb{R}} |x|^k |f(x)| \, dx < +\infty$, alors $\widehat{f}$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ (k est un entier ≥ 1).

c. Si μ est une mesure ≥ 0 finie sur $\mathbb{R}$, on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt} \,\mathrm{d}\mu(x).$$

Généraliser les résultats de continuité et dérivabilité.

Exercice 8. Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, positive, paire avec $\widehat{f}$ de classe C^2, alors

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Exercice 9. Montrer que

$$\int_{-2}^{2} \Bigl(1 - \frac{x^2}{4}\Bigr)^n \,\mathrm{d}x$$

tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Montrer que pour tout ε tel que $0 < \varepsilon \le 2$ on a

$$\lim_n \sqrt{n} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Bigl(1 - \frac{x^2}{4}\Bigr)^n \,\mathrm{d}x = 2\sqrt{\pi}.$$

Exercice 10. Si f est une fonction Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$, montrer que la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-|x-t|}\, f(t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11.

Si $\int |g_k|\,\mathrm{d}\mu \le 2^{-k}$ pour tout entier $k \ge 0$, montrer que la suite $(g_k(\omega))$ tend vers 0 pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$.

Si $(f_n) \subset \mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ tend vers f en norme L^p, trouver une sous-suite (f_{n_j}) qui tend vers f μ-presque partout.

Exercice 12 : théorèmes d'Egorov et de Lusin. On suppose que μ est une mesure ≥ 0 finie sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

a. Si la suite (f_n) de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables tend simplement vers 0 sur Ω, trouver pour tout $k \ge 0$ un entier n_k tel que $\mu\{|f_{n_k}| > 2^{-k}\} \le 2^{-k}$.

b. Montrer que pour tout entier k_0, la sous-suite $(f_{n_j})_j$ trouvée en *a* tend uniformément vers 0 sur l'ensemble

$$\mathrm{A}(k_0) = \bigcap_{k \ge k_0} \{|f_{n_k}| \le 2^{-k}\}$$

et que cet ensemble $\mathrm{A}(k_0)$ a une mesure qui tend vers $\mu(\Omega)$ lorsque $k_0 \to +\infty$.

c. Théorème de Lusin. Montrer que pour toute fonction f borélienne sur $[0,1]$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un compact $\mathrm{K}_\varepsilon \subset [0,1]$ tel que $\lambda([0,1] \setminus \mathrm{K}_\varepsilon) < \varepsilon$ et que la restriction de f à K_ε soit continue.

Exercice 13. Mesurabilité à valeurs dans un espace métrique séparable X : soit f mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans X muni de sa tribu borélienne ; si (x_k) est une suite dense dans X, on pose $f_n(\omega)$ égal au x_k le plus proche de $f(\omega)$ parmi $x_0, \ldots, x_n$, avec choix du plus petit indice k pour départager en cas d'égalité. Montrer que f_n est mesurable et converge simplement vers f.

Si X est un espace vectoriel normé séparable, montrer qu'on peut ajouter la condition $\|f_n(\omega)\| \le \|f(\omega)\|$ pour tout $\omega \in \Omega$.