Exercice 1. Si f est mesurable ≥ 0 et $p \geq 1$ montrer que

$$\int f^p \, \mathrm{d}\mu = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \mu(\{f > t\} \, \mathrm{d}t.$$

Exercice 2. Si f et g sont intégrables sur $\mathbb{R}$ posons

$$\mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t, \quad \mathrm{G}(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t) \, \mathrm{d}t.$$

Montrer que pour tous $a < b$ réels on a

$$\int_a^b \mathrm{F}(t) g(t) \, \mathrm{d}t = \big[\mathrm{F}\mathrm{G}\big]_a^b - \int_a^b f(t) \mathrm{G}(t) \, \mathrm{d}t.$$

Exercice 3. Si A est un borélien borné de $\mathbb{R}^d$ et g une fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}^d$, on peut poser pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$(\mathbf{1}_{\mathrm{A}} * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\mathrm{A}}(x - t) g(t) \, \mathrm{d}t.$$

Montrer que la fonction $\mathbf{1}_{\mathrm{A}} * g$ est continue. Si A est de mesure positive, montrer que l'ensemble $\mathrm{A} - \mathrm{A} = \{a_1 - a_2 : a_1, a_2 \in \mathrm{A}\}$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$.

Exercice 4. On considère une fonction $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, et l'opérateur linéaire borné T_g de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ dans lui-même donné par

$$\forall f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}), \quad \mathrm{T}_g(f) = f * g.$$

a. Montrer que $\|\mathrm{T}_g\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^1)} = \|g\|_1$.

b. On suppose maintenant que g est 2π-périodique intégrable sur chaque période, et que g agit par convolution *périodique* sur les fonctions continues 2π-périodiques : pour toute $f \in \mathrm{C}_{2\pi\text{-per}}$ on pose $\mathrm{S}_g(f) = f *_{\text{per}} g$. Montrer que la norme de l'opérateur S_g, agissant de $\mathrm{C}_{2\pi\text{-per}}$ dans lui-même, est égale à la norme de g dans $\mathrm{L}^1(0, 2\pi)$.

c. Déduire du théorème de Banach-Steinhaus qu'il existe des fonctions 2π-périodiques continues sur $\mathbb{R}$ dont la série de Fourier ne converge pas au point 0 (par exemple).

Exercice 5.

a. On suppose que $\alpha, \beta, \gamma > 0$ vérifient $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Montrer que pour toutes fonctions mesurables positives u, v, w sur un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ on a

$$\int u^\alpha v^\beta w^\gamma \, \mathrm{d}\mu \leq \Big(\int u \, \mathrm{d}\mu\Big)^\alpha \Big(\int v \, \mathrm{d}\mu\Big)^\beta \Big(\int w \, \mathrm{d}\mu\Big)^\gamma.$$

b. On suppose que $\alpha, \beta, \gamma > 0$ vérifient $\alpha + \beta + \gamma = 2$. Montrer que pour toutes fonctions mesurables positives $\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}$ sur $\mathbb{R}^d$ on a

$$\int \mathrm{U}(x-y)^\alpha \mathrm{V}(y)^\beta \mathrm{W}(x)^\gamma \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \leq \Big(\int \mathrm{U}(x) \, \mathrm{d}x\Big)^\alpha \Big(\int \mathrm{V}(x) \, \mathrm{d}x\Big)^\beta \Big(\int \mathrm{W}(x) \, \mathrm{d}x\Big)^\gamma.$$

En déduire que si $p, q, r \geq 1$ et $1/p + 1/q = 1 + 1/r$, on a $\mathrm{L}^p * \mathrm{L}^q \subset \mathrm{L}^r$, et plus précisément $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$ (*inégalité de convolution de Young*).

Indication pour un cas particulier, $\alpha = \beta = \gamma = 2/3$: on écrit le produit

$$\mathrm{U}(x-y)^{2/3} \mathrm{V}(y)^{2/3} \mathrm{W}(x)^{2/3}$$

comme produit des trois termes $(\mathrm{U}(x-y)\mathrm{V}(y))^{1/3}$, $(\mathrm{V}(y)\mathrm{W}(x))^{1/3}$ et $(\mathrm{U}(x-y)\mathrm{W}(x))^{1/3}$, on applique l'inégalité de Hölder pour trois fonctions avec les exposants $1/3, 1/3, 1/3$.

Exercice 6. On suppose que les espaces X, Y sont munis de mesures σ-finies μ, ν, et que $0 < r < p < +\infty$. Montrer que pour toute fonction mesurable positive f sur $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ on a

$$\Bigl(\int_{\mathrm{X}} \Bigl(\int_{\mathrm{Y}} f(x,y)^r \,\mathrm{d}\nu(y)\Bigr)^{p/r} \mathrm{d}\mu(x)\Bigr)^{1/p} \le \Bigl(\int_{\mathrm{Y}} \Bigl(\int_{\mathrm{X}} f(x,y)^p \,\mathrm{d}\mu(x)\Bigr)^{r/p} \mathrm{d}\nu(y)\Bigr)^{1/r}.$$

Exercice 7. Un *poids* δ sur $[0,1]$ est une fonction > 0 sur $[0,1]$ quelconque ; un *intervalle pointé* est le couple $([u,v],w)$ d'un intervalle $[u,v]$ et d'un point $w \in [u,v]$. On dit que l'intervalle pointé $([u,v],w)$ est *δ-fin* si $v - u < \delta(w)$. Une *subdivision pointée* de $[0,1]$ consiste en la donnée de points $x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ et de points $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, n$. On dit qu'une subdivision pointée est *δ-fine* si chaque intervalle pointé $([x_{j-1}, x_j], \xi_j)$ de la subdivision est δ-fin.

a. Montrer que pour tout poids δ il existe une subdivision pointée δ-fine de $[0,1]$.

b. Soit f une fonction dérivable sur $[0,1]$, et soit $\varepsilon > 0$; montrer qu'il existe un poids δ_1 tel que

$$\bigl|f(v) - f(u) - f'(w)(v-u)\bigr| < \varepsilon\,(v-u)$$

pour tout intervalle pointé $([u,v],w)$ qui est δ_1-fin. Montrer que

$$\Bigl|f(1) - f(0) - \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) f'(\xi_j)\Bigr| \le \varepsilon$$

pour toute subdivision δ_1-fine.

c. Soient g une fonction intégrable ≥ 0 sur $[0,1]$ et $\varepsilon > 0$; pour tout entier $k \ge 0$ posons $\mathrm{A}_k = \{k\,\varepsilon \le g < (k+1)\,\varepsilon\}$, et soit V_k un ouvert de $[0,1]$ contenant A_k tel que $\lambda(\mathrm{V}_k) < \lambda(\mathrm{A}_k) + 2^{-k}$, où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. Montrer qu'il existe un poids δ_2 tel que

$$\sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1})\, g(\xi_j) \le \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x + 3\,\varepsilon$$

pour toute subdivision δ_2-fine (indication : faire en sorte que les intervalles δ_2-fins restent dans un même ouvert V_k ; ensuite, regrouper les termes de la somme de Riemann selon l'ensemble A_k qui contient ξ_j).

d. On suppose que f est dérivable sur $[0,1]$ et que sa dérivée f' est Lebesgue-intégrable sur $[0,1]$. Montrer que

$$|f(1) - f(0)| \le \int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x + 4\,\varepsilon.$$

Montrer qu'en fait

$$f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x$$

(indication : approcher f' dans L^1 par une fonction continue φ et appliquer la question précédente à $f(x) - \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$).