Exercice 1. Montrer qu'il existe un nombre L tel que pour tout $\delta \in]0, \pi]$, on ait

$$\lim_n \sqrt{n} \int_{-\delta}^{\delta} \Bigl(\frac{1+\cos x}{2}\Bigr)^n \, \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = \mathrm{L}.$$

En déduire que la suite de fonctions (φ_n) définie par

$$\varphi_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{\mathrm{L}} \Bigl(\frac{1+\cos x}{2}\Bigr)^n$$

est une approximation de l'unité 2π-périodique. Si f est 2π-périodique et intégrable sur chaque période, et a tous ses coefficients de Fourier nuls, montrer que f est nulle presque-partout.

Exercice 2. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 3 : la base de Haar pour $\mathrm{L}^2(0,1)$. On définit la fonction φ sur $\mathbb{R}$ en posant $\varphi(x) = 1$ si $x \in [0, 1/2[$, $\varphi(x) = -1$ si $x \in [1/2, 1[$, et φ nulle ailleurs sur $\mathbb{R}$. Pour $n \geq 0$ et $j = 0, \ldots, 2^n - 1$, on pose

$$\forall x \in [0,1), \quad h_{n,j}(x) = 2^{n/2} \varphi(2^n x - j).$$

Montrer que la famille de fonctions formée de $\mathbf{1}$ et de toutes les fonctions $h_{n,j}$, $n \geq 0$ et $j = 0, \ldots, 2^n - 1$, est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(0,1)$.

Exercice 4. Déterminer les racines du polynôme

$$\mathrm{P}_{n-1} = \frac{1}{n}\bigl(\mathrm{X}^n - (\mathrm{X}-1)^n\bigr) = \mathrm{X}^{n-1} - \frac{n-1}{2}\,\mathrm{X}^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{6}\,\mathrm{X}^{n-3} + \cdots$$

puis calculer la somme des carrés des racines. Que trouve-t-on quand $n \to +\infty$?

Exercice 5. Le polynôme de Tchebychev T_n est déterminé par le fait que pour tout θ réel, on a $\mathrm{T}_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$. Montrer qu'on a aussi

$$\mathrm{T}_n(\operatorname{ch}\theta) = \operatorname{ch}(n\theta)$$

pour tout θ, et que pour $x \geq 1$,

$$\mathrm{T}_n(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2}.$$

Exercice 6. On définit une suite de matrices en posant $\mathrm{A}_0 = (1)$ (matrice de taille 1×1) puis pour tout $n \geq 0$

$$\mathrm{A}_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{A}_n & \mathrm{A}_n \\ -\mathrm{A}_n & \mathrm{A}_n \end{pmatrix}.$$

Montrer que A_n est orthogonale pour tout n, de déterminant égal à 1.

On définit une fonction φ sur $\mathbb{R}$ en posant $\varphi(x) = 1$ sur $[2k, 2k+1[$, $k \in \mathbb{Z}$ et $\varphi(x) = -1$ sinon ; on pose ensuite pour tout $x \in [0,1[$,

$$\varepsilon_n(x) = \varphi(2^n x)$$

pour tout $n \geq 1$. Pour tout ensemble fini $\mathrm{A} \subset \mathrm{N}^*$, on pose

$$\forall x \in [0,1[, \quad w_{\mathrm{A}}(x) = \prod_{j \in \mathrm{A}} \varepsilon_j(x)$$

(sans oublier l'ensemble vide, pour lequel $w_\emptyset = \mathbf{1}$). Montrer que la famille de toutes les fonctions (w_{A}) est une base hilbertienne de $\mathrm{L}_2(0,1)$.

Exercice 7. Soit f une fonction 2π-périodique, continue et C^1 par morceaux ; montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$.

Exercice 8. On donne un paramètre réel ou complexe $a \notin 2\pi\mathbb{Z}$, et on définit une fonction 2π-périodique f_a sur $\mathbb{R}$ en posant

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \quad f_a(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ax}\,.$$

Expliciter le résultat obtenu en appliquant le théorème de convergence de Dirichlet à la fonction f_a au point $x = \pi$.

Exercice 9. Si deux fonctions 2π-périodiques f et g, intégrables sur $(0, 2\pi)$, sont égales dans un intervalle non vide $]s-\varepsilon, s+\varepsilon[$, montrer que

$$\lim_n\, (\mathrm{S}_n f)(s) - (\mathrm{S}_n g)(s) = 0$$

(principe de localisation).

Exercice 10. Pour chaque entier $k \geq 1$ définissons une fonction f_k **paire**, continue et 2π-périodique par

$$f_k(x) = \sin(kx + x/2)$$

lorsque $0 < x < \pi$. Montrer que si $\ell \neq k$,

$$(\mathrm{S}_\ell f_k)(0) = (\mathrm{S}_k f_\ell)(0).$$

Si $2k \leq \ell$, montrer que pour $n \leq k$ on a

$$|c_n(f_\ell)| \leq \frac{4}{(2k+1)\pi} \quad \text{donc} \quad |(\mathrm{S}_k f_\ell)(0)| \leq \frac{4}{\pi}\cdot$$

Montrer qu'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que $(\mathrm{S}_\ell f_\ell)(0) \geq \kappa \ln \ell$ pour tout $\ell \geq 1$, et conclure que $(\mathrm{S}_n f)(0)$ ne converge pas pour la fonction f continue de l'exemple de Fejér,

$$f = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{f_{2^{p^3}}}{p^2}\cdot$$

Exercice 11. Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x < +\infty$ pour tout nombre réel a ; montrer que la transformée de Fourier de f se prolonge au plan complexe et que ce prolongement, qu'on notera $\widehat{f}(z)$, est la somme d'une série entière de rayon de convergence infinie.

Appliquer cette remarque à la fonction gaussienne $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$; montrer que $\widehat{f}(\mathrm{i}t)$ se calcule explicitement pour t réel, et en déduire l'expression de $\widehat{f}(t)$.