Exercice 1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)/x$. On sait que l'intégrale de f est semi-convergente et on pose

$$\ell = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

a. Montrer que la fonction f est dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.
b. Montrer que

$$g(t) = \lim_n \int_{-n}^{n} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}x$$

existe pour tout t, et calculer sa valeur (en fonction de t et de ℓ).
c. Déduire la valeur de ℓ de la formule d'inversion et du fait que f est la transformée de Fourier de $\frac{1}{2}\mathbf{1}_{(-1,1)}$.

Exercice 2. Soit f une fonction de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ nulle hors de $[-\pi,\pi]$, et désignons par f_0 la fonction 2π-périodique qui coïncide avec f sur $[-\pi,\pi[$; exprimer les coefficients de Fourier $c_n(f_0)$ de la fonction f_0 à partir de la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f. Appliquer la relation de Bessel-Parseval à f_0 pour évaluer

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

à partir de certaines valeurs de $\widehat{f}$. Pour chaque $s \in [0,1]$, appliquer le calcul précédent à la fonction $f_s(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}$. Intégrer le résultat en $s \in [0,1]$; qu'obtient-on ?

Exercice 3. On dit que f est dans l'espace de Sobolev $\mathrm{H}^s(\mathbb{R}^d)$, s entier ≥ 1, si f admet des dérivées partielles généralisées $\mathrm{D}_j f$ dans $\mathrm{H}^{s-1}(\mathbb{R}^d)$, pour $j = 1,\ldots,d$ (en convenant que $\mathrm{H}^0(\mathbb{R}^d) = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$). Si $f \in \mathrm{H}^s(\mathbb{R}^d)$ et $s > d/2$, montrer que la fonction f est continue.

Exercice 4. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$; montrer que pour tous $i,j = 1,\ldots,d$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathrm{D}_i\mathrm{D}_j\varphi|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\Delta\varphi|^2.$$

En déduire que pour qu'une fonction f appartienne à $\mathrm{H}^2(\mathbb{R}^d)$, il suffit que $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ et $\Delta f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, où Δf désigne le laplacien généralisé.

Exercice 5. Pour tout $\varepsilon > 0$ on considère la fonction f_ε définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\varepsilon(x) = \frac{\mathbf{1}_{|x|>\varepsilon}}{x}.$$

Vérifier que f_ε est dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et calculer sa transformée de Fourier.

Montrer que pour toute $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ la convolution $g * f_\varepsilon$ tend vers une limite $\mathrm{H}g$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ quand $\varepsilon \to 0$. Montrer que H définit une application linéaire continue de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

Montrer que si θ est à support compact, paire, égale à 1 dans un voisinage de 0, on a pour toute φ fonction C^1 à support compact et tout $x \in \mathbb{R}$

$$(\mathrm{H}\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x-y) - \varphi(x)\theta(y)}{y}\,\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\varphi(x-y)}{y}\,\mathrm{d}y.$$

Exercice 6. On désigne par B une matrice complexe fixée, de taille $d \times d$, et par K l'ensemble de ses valeurs propres. On considère un chemin fermé γ dans $\mathbb{C}$ qui ne rencontre pas K et on lui associe la matrice

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma (z\mathrm{I}_d - \mathrm{B})^{-1} \, dz.$$

a. Montrer que pour r assez grand et $\gamma = \gamma_r$ (le parcours habituel du cercle de rayon r centré en 0), la matrice P est égale à la matrice unité I_d.

b. On suppose que γ parcourt (une fois) un cercle dans le sens direct, et que ce cercle contient exactement une valeur propre λ de B. Montrer que la matrice P est un projecteur sur le sous-espace caractéristique de B associé à la valeur propre λ.

c. Si γ est un chemin fermé qui ne rencontre pas K, montrer que la matrice P est une combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs de projecteurs caractéristiques.

Exercice 7. On suppose que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, z^n$ existe pour tout $z \in \mathbb{C}$; on suppose de plus que la partie réelle $g(z) = \mathrm{Re}\, f(z)$ vérifie une majoration de la forme

$$\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \exists \mathrm{M},\ \forall z \in \mathbb{C}, \quad |g(z)| \leq \mathrm{M}\,(1 + |z|^{\mathrm{N}}).$$

En déduire que f est un polynôme de degré $\leq \mathrm{N}$.

Indication : pour r tendant vers l'infini, étudier les coefficients de la série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par $\theta \in [0, 2\pi] \to g(r\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$.

Exercice 8. Soit $\mathrm{P}_t = a_0(t) + a_1(t)\,\mathrm{X} + \cdots + a_n(t)\,\mathrm{X}^n \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ un polynôme dont les coefficients sont des fonctions continues du paramètre t. On suppose que P_0 n'a pas de racine sur le cercle unité et qu'il a exactement k racines dans le disque unité ouvert (comptées avec leur multiplicité). Montrer que pour t suffisamment proche de 0, le polynôme P_t n'a pas de racine sur le cercle unité et a exactement k racines dans le disque unité ouvert (comptées avec leur multiplicité).

Indication : considérer la fraction rationnelle P'/P.

Exercice 9. Soit (X, d) un espace métrique complet muni d'une distance d *bornée* ; sur l'espace $\mathcal{F}$ des fermés non vides de X on considère la distance de Hausdorff

$$h(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \sup\bigl\{\max(d(a, \mathrm{B}), d(b, \mathrm{A})) : (a, b) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}\bigr\}.$$

Montrer que $(\mathcal{F}, h)$ est complet.

Indication : considérer une suite de Cauchy (A_k) telle que $h(\mathrm{A}_k, \mathrm{A}_{k+1}) < 2^{-k-1}$ pour tout $k \geq 0$, et l'ensemble A des points $a \in \mathrm{X}$ qui sont limite d'une suite (a_k) avec $a_k \in \mathrm{A}_k$ pour tout $k \geq 0$.

Montrer que tout point $a_k \in \mathrm{A}_k$ est à distance $< 2^{-k}$ d'un point de A (introduire une suite convergente de points $(a_n)_{n \geq k}$ avec $a_n \in \mathrm{A}_n$ en utilisant la définition de $h(\mathrm{A}_n, \mathrm{A}_{n+1})$).

De façon analogue, montrer que tout point $a \in \mathrm{A}$ est à distance $< 2^{-k} + \varepsilon$ d'un point de A_k, pour tout $\varepsilon > 0$.

Pour finir, vérifier que A est fermé et conclure.