Exercice 1. Soit K un espace topologique compact (qui n'est pas supposé métrisable) ; montrer que pour tout $x \in \mathrm{K}$ et tout fermé F de K tel que $x \notin \mathrm{F}$, on peut trouver des ouverts V et W tels que

$$x \in \mathrm{V}, \quad \mathrm{F} \subset \mathrm{W}, \quad \mathrm{V} \cap \mathrm{W} = \emptyset.$$

Montrer que pour tout voisinage U du point x dans K, il existe un ouvert V de K tel que $x \in \mathrm{V} \subset \overline{\mathrm{V}} \subset \mathrm{U}$.

Si F_0 et F_1 sont deux fermés disjoints dans K, montrer qu'on peut trouver deux ouverts V_0 et V_1 tels que $\mathrm{F}_0 \subset \mathrm{V}_0$, $\mathrm{F}_1 \subset \mathrm{V}_1$ et $\mathrm{V}_0 \cap \mathrm{V}_1 = \emptyset$.

Exercice 2. Soit f une fonction de norme un dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < +\infty$; montrer que l'ensemble des translatées $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de la fonction f n'est pas compact dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$.

Indication. Évaluer la distance $\|f - f_t\|_p$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Exercice 3. On considère l'espace de Hilbert réel $\mathrm{H} = \ell_2(\mathbb{N})$. On se donne une suite de nombres $c_n > 0$ telle que $\sum c_n^2 < +\infty$, et on considère

$$\mathrm{C} = \{x = (x_n)_{n \ge 0} \in \mathrm{H} : \forall n \ge 0,\ |x_n| \le c_n\}.$$

Montrer que C est compact. Montrer que l'application φ de $\mathrm{K} = [-1, 1]^{\mathbb{N}}$ (muni de la topologie produit) dans H, définie par

$$\forall y = (y_n) \in \mathrm{K}, \quad \varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n c_n \mathbf{e}_n$$

est un homéomorphisme de K sur C (on a noté $(\mathbf{e}_n)_{n \ge 0}$ la base hilbertienne canonique de l'espace H).

On appelle souvent cet ensemble, sous une forme ou l'autre, le *cube de Hilbert*.

Exercice 4. Montrer que tout espace métrique complet non vide et sans point isolé contient un sous-ensemble homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor.

Exercice 5 : régularité des mesures sur la tribu borélienne d'un polonais. Soit μ une probabilité sur la tribu borélienne d'un espace polonais X, c'est-à-dire un espace topologique X séparable dont la topologie provient d'une distance qui rend X complet ; le but de l'exercice est de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $\mathrm{K}_\varepsilon \subset \mathrm{X}$ tel que $\mu(\mathrm{K}_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$.

a. Soit d une distance qui définit la topologie de X et le rend complet ; montrer que pour tous $r > 0$ et $\alpha > 0$, il existe un fermé F de X qui est contenu dans une réunion finie de boules de rayon r, et qui est tel que $\mu(\mathrm{F}) > 1 - \alpha$.

Indication. Soit (x_n) une suite dense dans X ; posons $\mathrm{A}_n = \cup_{i=0}^{n} \mathrm{B}(x_i, r/2)$. La suite (A_n) est croissante et recouvre X, parce que la suite (x_n) est dense.

b. Conclure en appliquant ce qui précède avec $r = 2^{-k}$ et $\alpha = \varepsilon/2^{k+1}$, pour tout $k \ge 0$.

Indication. On obtient une suite (F_k) de fermés telle que $\mu(\mathrm{F}_k) > 1 - 2^{-k-1}\varepsilon$ pour tout entier $k \ge 0$; considérer $\mathrm{K} = \cap_{k \ge 0} \mathrm{F}_k$.

Exercice 6. Soit (K, d) un espace métrique compact ; montrer que l'équicontinuité d'un ensemble de fonctions $\mathrm{A} \subset \mathrm{C}(\mathrm{K})$ implique l'équicontinuité uniforme de A (comme on montre qu'une fonction continue sur le compact K est uniformément continue).

Indication. Pour tout $x \in \mathrm{K}$ l'équicontinuité de A donne un ouvert U_x de K, contenant x et tel que $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ pour toute $f \in \mathrm{A}$ et tout $y \in \mathrm{U}_x$; les $(\mathrm{U}_x)_{x \in \mathrm{K}}$ forment un recouvrement ouvert du compact K...

Exercice 7 : contre-exemple à l'extraction de sous-suites convergentes dans un compact général. Désignons par K le disque unité fermé de $\mathbb{C}$; montrer que la suite (f_n) dans le compact $\mathrm{X} = \mathrm{K}^{[0,2\pi]}$ définie par $f_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ n'admet aucune sous-suite simplement convergente (l'espace X est muni de la topologie produit, c'est-à-dire la topologie de la convergence simple sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, pour laquelle il est compact par Tykhonov).

Indication : si une sous-suite (f_{n_k}) convergeait simplement vers une fonction limite f, on pourrait invoquer le théorème de convergence dominée.

Exercice 8. On suppose que k est une fonction réelle ou complexe, continue sur le triangle fermé $\{(x, t) : 0 \le t \le x \le 1\}$. On définit un opérateur linéaire continu T de $\mathrm{L}^1([0,1])$ dans $\mathrm{C}([0,1])$ en posant pour toute $f \in \mathrm{L}^1([0,1])$

$$(\mathrm{T}f)(x) = \int_0^x k(x,t) f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Pour tout q tel que $1 \le q \le +\infty$ on désigne par $\mathrm{T}_q \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^q([0,1]), \mathrm{C}([0,1]))$ la restriction de T à $\mathrm{L}^q([0,1])$; montrer que T_q est compact de $\mathrm{L}^q([0,1])$ dans $\mathrm{C}([0,1])$ pour tout $q > 1$, mais que T_1 n'est pas compact en général.

Exercice 9. On définit un opérateur linéaire P sur $\mathrm{L}_2(0,1)$ en posant pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_2(0,1)$

$$\forall s \in (0,1), \quad (\mathrm{P}f)(s) = \int_0^s f(t) \, \mathrm{d}t.$$

a. Vérifier que P est borné ; montrer que P est compact ; montrer que P est injectif.

b. Déterminer l'adjoint P^*. Diagonaliser $\mathrm{P}^*\mathrm{P}$.

Indication : si les fonctions f, g sont continues, les fonctions $\mathrm{P}f$ et P^*g sont dérivables ; montrer que les fonctions propres de $\mathrm{P}^*\mathrm{P}$ vérifient une équation différentielle, qu'on résoudra en tenant compte des diverses valeurs aux bornes.

Exercice 10. On rappelle que la fonction de Bessel J_0 peut être exprimée par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{J}_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

La fonction J_0 admet une infinité de zéros réels > 0 qui interviendront dans cet exercice, et qu'on notera $z_1 < \ldots < z_k < \ldots$.

a. Vérifier que $x\,\mathrm{J}_0''(x) + \mathrm{J}_0'(x) + x\,\mathrm{J}_0(x) = 0$ pour tout x ; chercher une autre solution $x \to y(x)$ sur $]0, z_1[$ de l'équation différentielle (de Bessel) $x\,y'' + y' + x\,y = 0$, en l'exprimant sous la forme $y(x) = u(x)\mathrm{J}_0(x)$; vérifier que $x\mathrm{J}_0(x)^2 u'(x)$ est constante et en déduire que les solutions sur $]0, z_1[$ qui restent bornées au voisinage de 0 sont proportionnelles à J_0. Si y vérifie l'équation de Bessel et si μ est un réel > 0, quelle est l'équation vérifiée par la fonction z définie par $z(x) = y(\mu x)$?

b. On désigne par ν la mesure à densité $\mathrm{d}\nu(t) = t\,\mathrm{d}t$ sur l'intervalle $[0,1]$, et on définit un opérateur linéaire T sur l'espace réel $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2([0,1],\nu)$ en posant pour toute $f \in \mathrm{H}$

$$\forall s \in]0,1], \quad (\mathrm{T}f)(s) = \ln(s) \int_0^s f(t)\,t\,\mathrm{d}t + \int_s^1 \ln(t) f(t)\,t\,\mathrm{d}t.$$

Vérifier que T est borné, hermitien, compact ; montrer que $\mathrm{T}f$ se prolonge en fonction continue sur $[0,1]$.

c. Dans le cas où f est continue sur $[0,1]$, montrer que $\mathrm{F} = \mathrm{T}f$ est deux fois dérivable sur l'ouvert $]0,1[$ et y vérifie $(x\mathrm{F}'(x))' = xf(x)$. En déduire que toute fonction φ de classe C^2 à support dans l'ouvert $]0,1[$ est l'image par T de $f = (x\varphi'(x))'/x$, et que T est injectif ; montrer que $\int_0^1 (\mathrm{T}f)(x) f(x)\,x\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 (\mathrm{F}'(x))^2\,x\,\mathrm{d}x \le 0$.

d. Diagonaliser T en montrant que les fonctions propres f doivent vérifier une certaine équation différentielle, avec les conditions au bord $f(1) = 0$ et f bornée au voisinage du point 0 (on devra considérer l'équation satisfaite par $x \to f(x/\mu)$, $\mu > 0$ bien choisi).

Exercice 11 : théorème de Mercer. Soient X un espace métrique compact et μ une mesure finie sur la tribu borélienne de X, telle que $\mu(\mathrm{V}) > 0$ pour tout ouvert non vide V ; on considère un noyau hermitien k sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$, c'est-à-dire que

$$\forall x, y \in \mathrm{X}, \quad k(x,y) = \overline{k(y,x)},$$

et on suppose que la fonction $(x,y) \to k(x,y)$ est *continue* sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$. Montrer que l'opérateur T_k défini sur $\mathrm{L}^2(\mathrm{X},\mu)$ par

$$(\mathrm{T}_k f)(x) = \int_{\mathrm{X}} k(x,y) f(y)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

est hermitien et compact sur $\mathrm{L}^2(\mathrm{X},\mu)$.

On suppose de plus que l'opérateur T_k est positif, c'est-à-dire

$$\forall f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{X},\mu), \quad \langle \mathrm{T}_k f, f \rangle \ge 0.$$

On sait que $\mathrm{L}^2(\mathrm{X},\mu)$ admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T_k. Montrer que plus précisément, il existe une suite de réels $\lambda_n \ge 0$ et des fonctions continues φ_n, de norme un dans L^2, telles que

$$\forall x, y \in \mathrm{X}, \quad k(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n\,\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(y)},$$

où la série de fonctions continues converge absolument et uniformément sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ (théorème de Mercer).

Indications : on notera que les fonctions propres de T_k pour les valeurs propres > 0 sont des fonctions continues ; on montrera que si h est un noyau hermitien continu tel que T_h soit positif, il en résulte que $h(x,x) \ge 0$ pour tout $x \in \mathrm{X}$ et

$$\forall x, y \in \mathrm{X}, \quad |h(x,y)|^2 \le h(x,x)\,h(y,y)\,;$$

on appliquera ceci à $\mathrm{T}_h = \mathrm{T}_k - \mathrm{S}_n$, où (S_n) est une suite convenable d'opérateurs de rang fini correspondant à des noyaux continus ; on utilisera Dini sur la diagonale de $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$.

Exercice 12. Trouver une fonction nulle part dérivable *à valeurs complexes* est légèrement plus facile que dans le cas des valeurs réelles ; c'est l'objet de cet exercice. On considère une suite croissante de réels $b_k > 0$ telle que b_{k+1}/b_k tende vers l'infini en croissant. Vérifier que les deux quantités

$$\Bigl(\sum_{j<k} b_j\Bigr)/b_k \quad \text{et} \quad b_k \sum_{j>k} 1/b_j$$

tendent vers 0 avec k ; vérifier que pour tout y réel on a $\bigl|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}y} - 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} + 1\bigr| \le y^2$.

On pose maintenant pour tout entier $j \ge 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_j(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi b_j x}}{b_j} \quad \text{puis} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi b_k x}}{b_k}.$$

Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}$. Si f est dérivable au point x, la quantité

$$\Delta_h(f) := \frac{f(x+2h) - f(x)}{2h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{2h}$$

doit tendre vers $f'(x) - f'(x) = 0$ quand h tend vers 0. Si $h_k = 1/b_k$, montrer que

$$\bigl|\Delta_{h_k}(f_k)\bigr| = 2,$$

puis montrer que

$$\Bigl|\sum_{j<k} \Delta_{h_k}(f_j)\Bigr| \le \frac{\pi^2}{2} \Bigl(\sum_{j<k} b_j\Bigr)/b_k \quad \text{et} \quad \Bigl|\sum_{j>k} \Delta_{h_k}(f_j)\Bigr| \le 2 b_k \sum_{j>k} 1/b_j.$$

Conclure que f n'est pas dérivable au point x. Après cet échauffement, montrer que

$$x \to \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi 4^k x}$$

est continue et nulle part dérivable.
Indication : prendre $h_k = 4^{-k}$ et refaire les calculs précédents avec soin ; noter que $\pi^2 < 10$ et $\Delta_{h_k}(f_j) = 0$ quand $j > k$.