Méthode de Laplace et développement asymptotique

La *méthode de Laplace*, appelée aussi *méthode du col*, s'intéresse au comportement quand $t \to +\infty$ d'intégrales de la forme

$$\int_a^b \mathrm{e}^{tf(x)}\,\mathrm{d}x,$$

où f est une fonction réelle qui atteint un maximum unique en un point x_0 intérieur à l'intervalle $[a,b]$; on suppose en général (a) que f est de classe C^2 et que $f''(x_0) < 0$.

Plusieurs des livres qui parlent de la méthode de Laplace se contentent de donner l'équivalent classique en $\mathrm{C}\,\mathrm{e}^{tf(x_0)}/\sqrt{t}$ quand $t \to +\infty$, sans chercher à pousser l'étude jusqu'à un *développement asymptotique* de l'expression, alors que cela se fait couramment pour la méthode cousine qu'on appelle *méthode de la phase stationnaire*, un autre « must » de l'oral de l'agrégation (par exemple : Queffélec-Zuily, chapitre IX, théorème VI.3, avec un petit bug (b) d'ailleurs). En fait, donner ce développement asymptotique pour la méthode de Laplace constitue un bon petit exercice sur les intégrales dépendant d'un paramètre, exercice plutôt facile mais un peu pénible, que nous allons traiter dans ce qui suit.

Proposition. *On suppose que φ est une fonction réelle de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et que ψ est une fonction réelle ou complexe de classe C^∞ à support dans un intervalle $[-c,c]$; on suppose de plus que*

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \quad \varphi'' < 0 \ \text{ sur le segment } \ [-c,c],\ c > 0.$$

Il existe alors une fonction F de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, paire, telle que pour $t > 0$ on ait

$$\sqrt{t}\ \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{t\varphi(x)}\,\psi(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(1/\sqrt{t}).$$

On a donc pour tout entier $n \ge 0$, quand $t \to +\infty$, d'après la formule de Taylor appliquée à F au point 0

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{t\varphi(x)}\,\psi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{t}}\Bigl(\mathrm{F}(0) + \frac{\mathrm{F}''(0)}{2t} + \cdots + \frac{\mathrm{F}^{(2n)}(0)}{(2n)!\,t^n} + \mathrm{O}\Bigl(\frac{1}{t^{n+1}}\Bigr)\Bigr)\,;$$

le coefficient $\mathrm{F}^{(k)}(0)$ ne dépend que des valeurs des dérivées $\varphi''(0),\ldots,\varphi^{(k+2)}(0)$ et $\psi(0),\ldots,\psi^{(k)}(0)$ au point 0 ; on a

$$\mathrm{F}(0) = \psi(0)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\varphi''(0)y^2/2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{2\pi}{|\varphi''(0)|}}\,\psi(0)$$

(et on sait que $\mathrm{F}^{(2p+1)}(0) = 0$ pour tout entier $p \ge 0$ puisque la fonction F est paire).

Preuve.— Si on pose $y = x\sqrt{t}$ puis $u = 1/\sqrt{t}$, l'expression à étudier devient

$$\mathrm{E}(t) := \sqrt{t} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{t\varphi(x)}\, \psi(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{t\,\varphi(y/\sqrt{t})}\, \psi(y/\sqrt{t})\, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\varphi(uy)/u^2}\, \psi(uy)\, \mathrm{d}y,$$

ce qui permet d'écrire tout de suite une formule pour la fonction F annoncée dans la proposition : pour u réel mais *non nul* on pose

$$\mathrm{F}(u) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\varphi(uy)/u^2}\, \psi(uy)\, \mathrm{d}y.$$

Par le changement de variable $z = -y$ on obtient

$$\mathrm{F}(u) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\varphi(-uz)/u^2}\, \psi(-uz)\, \mathrm{d}z = \mathrm{F}(-u),$$

donc F est paire. Il reste à prolonger F en $u = 0$. L'expression $\varphi(uy)/u^2$ se prolonge par continuité en $u = 0$; en effet, par Taylor avec reste intégral appliqué à φ, on obtient pour $u \neq 0$, puisque $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, l'égalité

$$\frac{\varphi(uy)}{u^2} = \frac{1}{u^2} \int_0^{uy} (uy - v)\, \varphi''(v)\, \mathrm{d}v = y^2 \int_0^1 (1 - s)\, \varphi''(suy)\, \mathrm{d}s\,;$$

la dernière expression se prolonge pour tout u réel en posant

$$(1) \qquad \forall y, u \in \mathbb{R}, \qquad \Phi(y, u) = y^2 \int_0^1 (1 - s)\, \varphi''(suy)\, \mathrm{d}s.$$

On peut ainsi achever la définition de F en posant pour tout $u \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{F}(u) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\Phi(y,u)}\, \psi(uy)\, \mathrm{d}y.$$

La quantité $\Phi(y, u)$ est clairement de classe C^∞ par rapport à la variable u, pour tout y fixé, par les théorèmes les plus classiques de dérivation sous le signe intégral ; en employant la notation moins encombrante

$$\mathrm{D}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial u},$$

on voit facilement que la $k$ième dérivée de Φ par rapport à u est égale à

$$(\mathrm{D}^k\Phi)(y, u) = y^{k+2} \int_0^1 (1 - s)s^k \varphi^{(k+2)}(suy)\, \mathrm{d}s,$$

dont la valeur pour $u = 0$ est égale à

$$(2) \qquad (\mathrm{D}^k\Phi)(y, 0) = y^{k+2}\, \varphi^{(k+2)}(0) \int_0^1 (s^k - s^{k+1})\, \mathrm{d}s = \frac{y^{k+2}}{(k + 1)(k + 2)}\, \varphi^{(k+2)}(0).$$

On voit aussi qu'on a pour tout entier $k \geq 1$

$$(3) \qquad \text{si} \quad |uy| \leq c, \qquad \bigl|(\mathrm{D}^k\Phi)(y, u)\bigr| \leq \frac{|y|^{k+2}}{(k + 1)(k + 2)}\, \mathrm{M}_{k+2}(c)$$

où $\mathrm{M}_{k+2}(c)$ désigne le maximum de $|\varphi^{(k+2)}(x)|$ quand x décrit l'intervalle $[-c, c]$. Il existe d'après l'hypothèse $\varphi'' < 0$ sur $[-c, c]$ une constante $\varepsilon > 0$ telle que $\varphi''(x) < -\varepsilon$ pour tout $x \in [-c, c]$; il en résulte d'après la formule (1) que $\Phi(y, u) \le -\varepsilon y^2/2$ lorsque $|uy| \le c$. Comme $\psi(uy)$ est nul quand $|uy| > c$, on voit qu'il existe une constante N_0 (le maximum de $|\psi(x)|$) telle que

$$\forall y, u \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{\Phi(y,u)}\, |\psi(uy)| \le \mathrm{N}_0\ \mathrm{e}^{-\varepsilon y^2/2}$$

ce qui donne, pour la quantité sous l'intégrale qui définit $\mathrm{F}(u)$, une majoration par une fonction intégrable en y indépendante du paramètre u. Ceci prouve déjà la continuité de la fonction F (c). Pour pouvoir dériver $\mathrm{F}(u)$, on rappelle d'abord que

$$(\mathrm{D}\Phi)(y, u) := \frac{\partial \Phi}{\partial u}(y, u) = y^3 \int_0^1 s(1-s)\varphi^{(3)}(suy)\, \mathrm{d}s,$$

qu'on peut majorer par $\mathrm{M}_3(c)\,|y|^3/6$ quand $|uy| \le c$ d'après (3) ; ensuite, on voit que la dérivée en u de la quantité sous l'intégrale qui définit $\mathrm{F}(u)$ est

$$\mathrm{e}^{\Phi(y,u)} \bigl(\mathrm{D}\Phi(y, u)\, \psi(uy) + y\, \psi'(uy)\bigr)$$

qui peut être majorée par $(\mathrm{N}_0 \mathrm{M}_3(c)\,|y|^3/6 + \mathrm{N}_1\,|y|)\ \mathrm{e}^{-\varepsilon y^2/2}$, en désignant par N_0 le maximum de $|\psi(x)|$ et par N_1 le maximum de $|\psi'(x)|$; on a ainsi un majorant intégrable fixe, indépendant du paramètre u. On a donc pour commencer

$$\mathrm{F}'(u) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\Phi(y,u)} \bigl(\mathrm{D}\Phi(y, u)\, \psi(uy) + y\, \psi'(uy)\bigr)\, \mathrm{d}y\,;$$

on sait que $\mathrm{F}'(0) = 0$ puisque F est paire (d).

Il est clair que les calculs des dérivées successives donneront lieu aux mêmes phénomènes (e) de majoration. Par un calcul plus compliqué, on trouve que

$$\begin{aligned}\mathrm{F}''(u) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\Phi(y,u)} \Bigl(&(\mathrm{D}\Phi)(y, u)\bigl((\mathrm{D}\Phi)(y, u)\, \psi(uy) + y\, \psi'(uy)\bigr) \\ &+ (\mathrm{D}^2\Phi)(y, u)\, \psi(uy) + (\mathrm{D}\Phi)(y, u)\, y\, \psi'(uy) + y^2\, \psi''(uy)\Bigr)\, \mathrm{d}y,\end{aligned}$$

donc en posant $\mathbf{f}_k = \varphi^{(k)}(0)$ pour tout $k \ge 2$, on obtient

$$\mathrm{F}''(0) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathbf{f}_2 y^2/2} \Bigl(\frac{y^6}{36}\ \mathbf{f}_3^2\, \psi(0) + \frac{y^4}{3}\ \mathbf{f}_3\, \psi'(0) + \frac{y^4}{12}\ \mathbf{f}_4\, \psi(0) + y^2\, \psi''(0)\Bigr)\, \mathrm{d}y.$$

On remarque que toutes les intégrales sont de la forme $\int_{\mathbb{R}} y^{2k}\, \mathrm{e}^{-ry^2}\ \mathrm{d}y$, donc non nulles, mais calculables. Si on a le courage, on trouve

$$\mathrm{F}''(0) = \sqrt{\frac{2\pi}{|\mathbf{f}_2|}}\ \Bigl[\Bigl(\frac{15}{36}\, |\mathbf{f}_2|^{-3} \mathbf{f}_3^2 + \frac{1}{4}\, |\mathbf{f}_2|^{-2} \mathbf{f}_4 \Bigr)\, \psi(0) + |\mathbf{f}_2|^{-2} \mathbf{f}_3\, \psi'(0) + |\mathbf{f}_2|^{-1} \psi''(0) \Bigr].$$

Puisque F est paire, ses dérivées impaires sont toutes nulles pour $u = 0$. Le développement asymptotique de l'intégrale pour $t \to +\infty$, donné dans l'énoncé de la proposition, résulte donc immédiatement de la formule de Taylor pour F en 0. On montre par récurrence (e) que la dérivée d'ordre k par rapport à u de

$$\mathrm{G}(y, u) = \mathrm{e}^{\Phi(y,u)}\, \psi(uy)$$

est de la forme $\mathrm{e}^{\Phi(y,u)}\, \mathrm{P}(y, u)$ où $\mathrm{P}(y, u)$ est une expression polynomiale en $(\mathrm{D}\Phi)(y, u)$, $\ldots, (\mathrm{D}^k\Phi)(y, u)$, $\psi(uy), \ldots, y^k \psi^{(k)}(uy)$. Il en résulte par la formule (2) que $(\mathrm{D}^k\mathrm{G})(y, 0)$ est de la forme $\mathrm{e}^{\mathbf{f}_2 y^2/2}\, \mathrm{Q}(y)$ où $\mathrm{Q}(y)$ est une expression polynomiale en $y^3 \mathbf{f}_3, \ldots, y^{k+2} \mathbf{f}_{k+2}$, $\psi(0), \ldots, y^k \psi^{(k)}(0)$. Après intégration en y on obtient pour $\mathrm{F}^{(k)}(0)$ la forme annoncée.

Remarque 1. L'hypothèse que φ est de classe C^∞ est juste une question de confort. Si on suit la preuve de la proposition, on voit que sous l'hypothèse que φ est de classe C^{k+2} et a de classe C^k, on peut montrer que F est de classe C^k. Dans ce cas bien sûr la longueur du développement asymptotique est limitée par la valeur de k.

Remarque 2. Le cas d'une fonction φ sur $\mathbb{R}^d$ est presque identique au plan des idées, mais les détails sont fastidieux. On voit apparaître la matrice hessienne $\mathrm{H}_0\varphi$ de φ au point 0, à la place de $\varphi''(0)$; cette matrice doit être *définie négative*, et la valeur $|\mathbf{f}_2|$ qui apparaît dans les formules ci-dessus sera remplacée par $|\det \mathrm{H}_0\varphi|$ qui provient du calcul de l'intégrale «gaussienne»

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-y^{\mathrm{T}}(\mathrm{H}_0\varphi)\,y/2}\,\mathrm{d}y,$$

par exemple par le changement de variables $z = \mathrm{A}y$ où A est la racine carrée de la matrice $-\mathrm{H}_0\varphi$. Les dérivées de $\Phi(y,u)$ par rapport au paramètre réel u seront, pour $y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ fixé, de la forme

$$(\mathrm{D}^k\Phi)(y,0) = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \sum_{i_1,\ldots,i_{k+2}=1}^{d} \frac{\partial^{k+2}\varphi}{\partial y_{i_1}\ldots\partial y_{i_{k+2}}}(0)\, y_{i_1}\cdots y_{i_{k+2}}.$$

Remarque 3. Sous les mêmes hypothèses, on pourrait s'intéresser au comportement de

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{t\varphi(x)}\,\psi(x)\,\mathrm{d}x$$

quand $t \to +\infty$. Dans ce cas, les intégrales sur $[0,+\infty[$ des puissances impaires de y par rapport aux mesures gaussiennes ne sont plus nulles : la fonction F n'est plus paire et on n'aura plus $\mathrm{F}'(0) = 0$ en général ; le développement asymptotique de l'intégrale sur $[0,+\infty[$ contient maintenant toutes les puissances entières ≥ 1 de $t^{-1/2}$.

Théorème. *On considère un intervalle ouvert non vide (a,b), borné ou non, et un point x_0 tels que $-\infty \leq a < x_0 < b \leq +\infty$; on suppose que f est une fonction réelle sur (a,b), qui est de classe C^∞ au voisinage de x_0, et que g est une fonction réelle ou complexe de classe C^∞ au voisinage de x_0 ; on suppose de plus que f est mesurable sur (a,b), que*

$$\sup\{f(x) : |x - x_0| \geq \delta\} < f(x_0) \tag{4}$$

pour tout $\delta > 0$, que

$$f''(x_0) < 0, \tag{5}$$

et on suppose qu'il existe t_0 tel que

$$\int_a^b \mathrm{e}^{t_0 f(x)}\,|g(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty. \tag{6}$$

Il existe alors des coefficients numériques $c_0, c_1, \ldots$, dépendant seulement des dérivées successives de f et de g en x_0, tels que pour tout $n \geq 0$ on ait pour t tendant vers $+\infty$

$$\int_a^b \mathrm{e}^{tf(x)}\,g(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{tf(x_0)}\Big(\frac{c_0}{t^{1/2}} + \frac{c_1}{t^{3/2}} + \cdots + \frac{c_n}{t^{n+1/2}} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{t^{n+3/2}}\Big)\Big)\,;$$

on a de plus

$$c_0 = \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_0)|}}\, g(x_0).$$

Preuve. — On va commencer par une remarque simple mais essentielle : sous l'hypothèse (4) (complétée par (6)), c'est ce qui se passe au voisinage de x_0 qui compte, pour identifier le développement asymptotique. Notre problème est d'étudier

$$\mathrm{I}(t) = \int_a^b \mathrm{e}^{tf(x)}\, g(x)\, \mathrm{d}x$$

quand $t \to +\infty$. Considérons une fonction θ égale à 1 dans un voisinage V de x_0, telle que $0 \le \theta \le 1$, et posons

$$\mathrm{I}_2(t) = \int_a^b \mathrm{e}^{tf(x)}\, g(x)(1-\theta(x))\, \mathrm{d}x.$$

Nous allons prouver le fait suivant : *il existe un nombre $m < f(x_0)$ et une constante* C *tels que pour tout $t > t_0$, on ait*

$$\big|\mathrm{I}_2(t)\big| \le \mathrm{C}\ \mathrm{e}^{tm}\,.$$

En conséquence, l'intégrale $\mathrm{I}_2(t)$ est négligeable devant $\mathrm{e}^{tf(x_0)}\, t^{-\alpha}$ pour tout α, quand $t \to +\infty$.

Justifions l'affirmation précédente. Comme $1-\theta(x)$ est nul dans le voisinage V de x_0, le calcul de l'intégrale $\mathrm{I}_2(t)$ «n'utilise» que des valeurs de f dans $(a,b) \setminus \mathrm{V}$; d'après l'hypothèse (4), le maximum m de ces valeurs $f(x)$ est $< f(x_0)$. On a donc pour $t > t_0$

$$|\mathrm{I}_2(t)| \le \int_{(a,b)\setminus \mathrm{V}} \mathrm{e}^{(t-t_0)f(x)}\, \mathrm{e}^{t_0 f(x)}\, |g(x)|\, \mathrm{d}x \le \int_a^b \mathrm{e}^{(t-t_0)m}\, \mathrm{e}^{t_0 f(x)}\, |g(x)|\, \mathrm{d}x = \mathrm{C}\ \mathrm{e}^{tm}\,.$$

On va voir, en se ramenant à la proposition, que la partie restante de l'intégrale, à savoir

$$\mathrm{I}_1(t) = \mathrm{I}(t) - \mathrm{I}_2(t) = \int_a^b \mathrm{e}^{tf(x)}\, g(x)\theta(x)\, \mathrm{d}x$$

admet un développement formé de termes de l'échelle $\mathrm{e}^{tf(x_0)}\, t^{-\alpha}$, qui sont tous infiniment grands devant $\mathrm{I}_2(t)$. Ainsi, le développement asymptotique de $\mathrm{I}(t)$ dans cette échelle se réduit à celui de $\mathrm{I}_1(t)$.

On peut trouver $c > 0$ tel que l'intervalle $[x_0 - 2c, x_0 + 2c]$ soit contenu dans (a,b), et que sur cet intervalle f et g soient C^∞ et $f'' < 0$. On précise le choix de la fonction plateau θ introduite ci-dessus : elle est égale à 1 dans un voisinage ouvert V de x_0, on a $0 \le \theta \le 1$ et on suppose de plus maintenant que son support est contenu dans $[x_0 - c, x_0 + c]$. La proposition va permettre de traiter l'intégrale

$$\mathrm{e}^{-tf(x_0)}\, \mathrm{I}_1(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{t(f(x)-f(x_0))}\, g(x)\theta(x)\, \mathrm{d}x\,;$$

en effet, posons $\varphi(y) = (f(x_0+y) - f(x_0))\chi(y)$ où χ est C^∞, égale à 1 sur $[-c,c]$ et à support dans $[-2c, 2c]$, et posons $\psi(y) = g(x_0+y)\theta(x_0+y)$ (on prolonge les fonctions φ

et ψ à $\mathbb{R}$ en leur donnant la valeur 0 là où elles n'étaient pas définies ; on vérifie que φ et ψ, ainsi définies, sont bien C^∞ sur $\mathbb{R}$). On a alors

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{t(f(x)-f(x_0))}\, g(x)\theta(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0-c}^{x_0+c} \mathrm{e}^{t(f(x)-f(x_0))}\, g(x)\theta(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-c}^{c} \mathrm{e}^{t(f(x_0+y)-f(x_0))\chi(y)}\, g(x_0+y)\theta(x_0+y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{t\varphi(y)}\, \psi(y)\,\mathrm{d}y.$$

La fonction ψ est à support dans l'intervalle $[-c, c]$ et sur cet intervalle on a $\chi(y) = 1$, $\varphi''(y) = f''(x_0+y) < 0$. Comme f est dérivable et atteint son maximum en x_0 d'après (4), on a $0 = f'(x_0) = \varphi'(0)$ et clairement $\varphi(0) = 0$. On peut donc appliquer la proposition : il existe des coefficients $c_0, c_1, \ldots$ tels que

$$\mathrm{e}^{-tf(x_0)}\,\mathrm{I}_1(t) = t^{-1/2}\mathrm{F}(t^{-1/2}) = t^{-1/2}\Big(c_0 + c_1 t^{-1} + \cdots + c_n t^{-n} + \mathrm{O}(t^{-n-1})\Big)$$

quand $t \to +\infty$, et on sait que

$$c_0 = \sqrt{\frac{2\pi}{|\varphi''(0)|}}\,\psi(0) = \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_0)|}}\,g(x_0),$$

ce qui donne le résultat annoncé.

Notes

(a) Dans *Calcul infinitésimal*, Dieudonné traite le cas d'une intégrale sur $[0+\infty[$ avec $\varphi(x) \sim cx^\alpha$ au voisinage (droit) de 0 ; le cas usuel de classe C^2 correspond à $\alpha = 2$.

(b) Dans cet énoncé de la méthode de la phase stationnaire dans Q-Z, il faut supposer en plus que $\varphi(x_0) = 0$, sinon les constantes numériques $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \ldots$ de l'énoncé du théorème VI.3 sont en fait des *fonctions* : après avoir annoncé des constantes, les auteurs écrivent

$$\mathrm{A}_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\varphi(x_0)}\,\frac{\sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon\pi/4}}{\sqrt{|\varphi''(x_0)|}}\,a(x_0).$$

On pourrait essayer de s'en tirer en disant que les A_j sont des fonctions *de module constant*. Mais le plus simple est d'ajouter l'hypothèse $\varphi(x_0) = 0$: si $\varphi(x_0) = 0$, les valeurs A_j sont bien des constantes ; le cas général s'en déduit immédiatement : on obtient un développement où la fonction $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\varphi(x_0)}$ apparaît en facteur,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\varphi(x_0)}\Big(\frac{\mathrm{A}_0}{t^{1/2}} + \frac{\mathrm{A}_1}{t^{3/2}} + \cdots + \frac{\mathrm{A}_n}{t^{n+1/2}} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{t^{n+3/2}}\Big)\Big).$$

Au plan formel, on peut considérer que c'est identique à ce qu'on a fait pour Laplace. Mais pour justifier les dérivations, il n'y a plus ici de majorant intégrable (le terme limite « gaussien » $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi''(x_0)y^2/2}$ est de module un), et les preuves sont très différentes.

(c) Dire que $\mathrm{F}(u)$ tend vers $\mathrm{F}(0)$ quand u tend vers 0 donne l'équivalent usuel de l'intégrale, tel qu'il est fourni par la méthode de Laplace : quand t tend vers $+\infty$, et sous les hypothèses de la proposition, on peut écrire si $\psi(0) \neq 0$ que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{t\varphi(x)}\,\psi(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(1/\sqrt{t})/\sqrt{t} \sim \mathrm{F}(0)/\sqrt{t} = \sqrt{\frac{2\pi}{t|\varphi''(0)|}}\,\psi(0).$$

($^{\mathbf{d}}$) En remplaçant dans la formule pour $\mathrm{F}'(u)$ on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{F}'(0) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\Phi(y,0)} \bigl(\mathrm{D}\Phi(y,0)\,\psi(0) + y\,\psi'(0)\bigr)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\varphi''(0)\,y^2/2} \Bigl(\frac{y^3}{6}\,\varphi^{(3)}(0)\,\psi(0) + y\,\psi'(0)\Bigr)\,\mathrm{d}y\,; \end{aligned}$$

on sait déjà que $\mathrm{F}'(0) = 0$ puisque F est paire, mais on le retrouve ici : par imparité, les intégrales $\int_{\mathbb{R}} y^{2p+1}\,\mathrm{e}^{-ry^2}\,\mathrm{d}y$ sont nulles pour tous p entier et $r > 0$, donc $\mathrm{F}'(0) = 0$.

($^{\mathbf{e}}$) On montre par récurrence que la dérivée $k$ième en u de

$$\mathrm{G}(y,u) = \mathrm{e}^{\Phi(y,u)}\,\psi(uy)$$

est combinaison linéaire d'expressions telles que

$$\mathrm{E}(y,u) = \mathrm{e}^{\Phi}(\mathrm{D}\Phi)^{\alpha_1}\,(\mathrm{D}^2\Phi)^{\alpha_2}\ldots(\mathrm{D}^p\Phi)^{\alpha_p}\,y^{\beta}\psi^{(\beta)}(uy)$$

avec les α_j et β entiers ≥ 0, $\beta + \sum_{j=1}^p j\alpha_j = k$, où on a omis le couple (y,u) dans $\Phi(y,u)$ et dans $(\mathrm{D}^j\Phi)(y,u)$ pour alléger ; en effet, la dérivée en u de $\mathrm{E}(y,u)$, qui est le produit de $p+2$ fonctions de u, est égale à la somme de $p+2$ termes : le premier est

$$(\mathrm{D}\Phi)\,\mathrm{E} = \mathrm{e}^{\Phi}(\mathrm{D}\Phi)^{\alpha_1+1}\,(\mathrm{D}^2\Phi)^{\alpha_2}\ldots(\mathrm{D}^p\Phi)^{\alpha_p}\,y^{\beta}\psi^{(\beta)}(uy),$$

suivi de p expressions dans lesquelles le facteur $(\mathrm{D}^j\Phi)^{\alpha_j}$ de $\mathrm{E}(y,u)$, $j = 1,\ldots,p$ est remplacé par sa dérivée $\alpha_j(\mathrm{D}^j\Phi)^{\alpha_j-1}(\mathrm{D}^{j+1}\Phi)$, ce qui donne

$$\alpha_j\,\mathrm{e}^{\Phi}(\mathrm{D}\Phi)^{\alpha_1}\,(\mathrm{D}^2\Phi)^{\alpha_2}\ldots(\mathrm{D}^j\Phi)^{\alpha_j-1}(\mathrm{D}^{j+1}\Phi)^{\alpha_{j+1}+1}\ldots(\mathrm{D}^p\Phi)^{\alpha_p}\,y^{\beta}\psi^{(\beta)}(uy),$$

et enfin de

$$\mathrm{e}^{\Phi}(\mathrm{D}\Phi)^{\alpha_1}\,(\mathrm{D}^2\Phi)^{\alpha_2}\ldots(\mathrm{D}^p\Phi)^{\alpha_p}\,y^{\beta+1}\psi^{(\beta+1)}(uy)\,;$$

toutes ces expressions ont bien la forme annoncée. Comme $(\mathrm{D}^j\Phi)(y,u)$ est majoré quand $|uy| \le c$ par un multiple de $|y|^{j+2}$ d'après (3), et que ψ et ses dérivées sont nulles hors de $[-c,c]$, on déduit que chacun des termes tels que $\mathrm{E}(y,u)$, qui constituent la dérivée $k$ième en u de $\mathrm{G}(y,u)$, est majoré sur $\mathbb{R}$ par un multiple de

$$\mathrm{e}^{-\varepsilon y^2/2}\,|y|^n$$

avec $n = \beta + \sum_{j=1}^p \alpha_j(j+2) = k + 2\sum_{j=1}^p \alpha_j$ (il y a plusieurs valeurs de n pour les différents termes qui forment la dérivée d'ordre k, mais toutes ces valeurs de n ont la même parité que k). En regroupant les différents termes, on obtient un majorant intégrable de la forme $\mathrm{e}^{-\varepsilon y^2/2}\,\mathrm{P}(|y|)$ pour $(\mathrm{D}^k\mathrm{G})(y,u)$, qui permet de dériver $\mathrm{F}(u)$ à l'ordre k, et ceci pour tout entier $k \ge 0$.