Exercice 1. Si $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une famille d'éléments de $[0,+\infty]$, la notation $\sum_{i\in\mathrm{I}} u_i$ désigne la borne supérieure des sommes finies $\sum_{i\in\mathrm{J}} u_i$, pour J fini contenu dans I.

a. Si $(\mathrm{I}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ est une partition de I, montrer que

$$\sum_{\alpha\in\mathrm{A}}\Bigl(\sum_{i\in\mathrm{I}_\alpha} u_i\Bigr) = \sum_{i\in\mathrm{I}} u_i.$$

b. Si I est dénombrable et si $(i_n)_{n\geq 0}$ est une énumération de I, montrer que

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{i_n}.$$

c. Si la somme $\sum_{i\in\mathrm{I}} u_i$ est finie, montrer que l'ensemble I_0 des indices i tels que $u_i > 0$ est fini ou dénombrable.

Exercice 2. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts (qu'on peut même supposer deux à deux disjoints).

Exercice 3. Si I est un intervalle contenu dans $[0,1]$, on note $\ell(\mathrm{I})$ sa longueur ; on dira qu'un ensemble $\mathrm{B}\subset[0,1]$ est *simple* si c'est une réunion finie d'intervalles disjoints, et dans ce cas la mesure $\ell(\mathrm{B})$ de cet ensemble est la somme des longueurs de ces intervalles. Si X est un sous-ensemble de $[0,1]$, la *mesure extérieure de* X, notée $\lambda^*(\mathrm{X})$, est la borne inférieure des nombres m tels qu'il existe une famille finie ou dénombrable d'intervalles $(\mathrm{I}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ telle que

$$\mathrm{X}\subset\bigcup_{\alpha\in\mathrm{A}}\mathrm{I}_\alpha \quad\text{et}\quad \sum_{\alpha\in\mathrm{A}}\ell(\mathrm{I}_\alpha) < m.$$

a. Montrer que $\lambda^*(\mathrm{B}) = \ell(\mathrm{B})$ quand B est simple ; montrer que

$$\lambda^*\bigl(\bigcup_{n=0}^{+\infty}\mathrm{X}_n\bigr) \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^*(\mathrm{X}_n).$$

On dira qu'une suite (B_n) d'ensembles simples dans $[0,1]$ *tend en mesure* vers un ensemble $\mathrm{X}\subset[0,1]$ si la mesure extérieure de la différence symétrique

$$\mathrm{X}\,\triangle\,\mathrm{B}_n = (\mathrm{X}\setminus\mathrm{B}_n)\cup(\mathrm{B}_n\setminus\mathrm{X})$$

tend vers 0. Montrer que dans ce cas, la suite $\ell(\mathrm{B}_n)$ tend vers une limite, et que cette limite ne dépend pas de la suite (B_n) particulière : on la notera $\lambda(\mathrm{X})$.

b. Montrer que la collection $\mathcal{M}$ de ces ensembles X est une tribu, et que λ est une mesure sur $\mathcal{M}$ qui prolonge ℓ.

Exercice 4. Montrer que pour toute suite croissante de mesures positives (μ_n) sur un espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$, la limite $\mathrm{A}\in\mathcal{A}\to\mu(\mathrm{A}) = \lim_n\mu_n(\mathrm{A})$ est une mesure positive sur $(\Omega,\mathcal{A})$. Montrer que pour toute suite de mesures positives (ν_k) sur un espace mesurable $(\Omega,\mathcal{A})$, la formule

$$\mathrm{A}\in\mathcal{A}\to\nu(\mathrm{A}) = \sum_{k=0}^{+\infty}\nu_k(\mathrm{A})$$

définit une mesure positive sur $(\Omega,\mathcal{A})$.

Exercice 5. Si f est une fonction mesurable ≥ 0, montrer que $\int f \, \mathrm{d}\mu = 0$ si et seulement si $\mu(\{f > 0\}) = 0$.

Montrer que si $\int f \, \mathrm{d}\mu < \infty$, alors $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$.

Exercice 6. Soit f une fonction mesurable sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (muni de sa tribu borélienne) ; on suppose que f est intégrable par rapport à une mesure positive μ sur (Ω, μ). Si on a $\int_{\mathrm{A}} f \, \mathrm{d}\mu \geq 0$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, montrer que f est ≥ 0 μ-presque partout.

Exercice 7. On suppose que μ est une mesure ≥ 0 sur un espace mesurable $(\mathrm{X}, \mathcal{A})$ et f une fonction $\mathcal{A}$-mesurable ≥ 0 sur X ; montrer que la formule

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \nu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} f \, \mathrm{d}\mu = \int \mathbf{1}_{\mathrm{A}} f \, \mathrm{d}\mu$$

définit une mesure positive ν sur $(\mathrm{X}, \mathcal{A})$.

Exercice 8. Calculer

$$\int_0^1 \frac{\ln(1/x)}{1-x} \, \mathrm{d}x.$$

Exercice 9. Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt} \, \mathrm{d}x.$$

a. Montrer que $\widehat{f}$ est bornée, continue, et tend vers 0 à l'infini.

b. Montrer que si $\int_{\mathbb{R}} |x|^k |f(x)| \, dx < +\infty$, alors $\widehat{f}$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ (k est un entier ≥ 1).

c. Si μ est une mesure ≥ 0 finie sur $\mathbb{R}$, on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt} \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Généraliser les résultats de continuité et dérivabilité.

Exercice 10. Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, positive, paire avec $\widehat{f}$ de classe C^2, alors

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) \, \mathrm{d}x < +\infty.$$

Exercice 11. Montrer que

$$\int_{-2}^{2} \Big(1 - \frac{x^2}{4}\Big)^n \, \mathrm{d}x$$

tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Montrer que pour tout ε tel que $0 < \varepsilon \leq 2$ on a

$$\lim_n \sqrt{n} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Big(1 - \frac{x^2}{4}\Big)^n \, \mathrm{d}x = 2\sqrt{\pi}.$$

Exercice 12. On suppose que f est une fonction réelle dérivable en tout point de $\mathbb{R}$, et que sa dérivée f' est bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tous $a < b$, on a

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a).$$

Exercice 13. Si f est une fonction Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$, montrer que la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-|x-t|}\, f(t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14. Si (f_n) est une suite de fonctions réelles $\mathcal{A}$-mesurables définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$, montrer que l'ensemble A des points $\omega \in \Omega$ où la limite $\lim_n f_n(\omega)$ existe est un ensemble de la tribu $\mathcal{A}$.

Exercice 15.

Si $\int |g_k|\,\mathrm{d}\mu \le 2^{-k}$ pour tout entier $k \ge 0$, montrer que la suite $(g_k(\omega))$ tend vers 0 pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$.

Si $(f_n) \subset \mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ tend vers f en norme L^p, trouver une sous-suite (f_{n_j}) qui tend vers f μ-presque partout.

Exercice 16 : théorèmes d'Egorov et de Lusin. On suppose que μ est une mesure ≥ 0 finie sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

a. Si la suite (f_n) de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables tend simplement vers 0 sur Ω, trouver pour tout $k \ge 0$ un entier n_k tel que $\mu\{|f_{n_k}| > 2^{-k}\} \le 2^{-k}$.

b. Montrer que pour tout entier k_0, la sous-suite $(f_{n_j})_j$ trouvée en a tend uniformément vers 0 sur l'ensemble

$$\mathrm{A}(k_0) = \bigcap_{k \ge k_0} \{|f_{n_k}| \le 2^{-k}\}$$

et que cet ensemble $\mathrm{A}(k_0)$ a une mesure qui tend vers $\mu(\Omega)$ lorsque $k_0 \to +\infty$.

c. Théorème de Lusin. Montrer que pour toute fonction f borélienne sur $[0,1]$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un compact $\mathrm{K}_\varepsilon \subset [0,1]$ tel que $\lambda([0,1] \setminus \mathrm{K}_\varepsilon) < \varepsilon$ et que la restriction de f à K_ε soit continue.

Exercice 17. Mesurabilité à valeurs dans un espace métrique séparable X : soit f mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans X muni de sa tribu borélienne ; si (x_k) est une suite dense dans X, on pose $f_n(\omega)$ égal au x_k le plus proche de $f(\omega)$ parmi $x_0, \ldots, x_n$, avec choix du plus petit indice k pour départager en cas d'égalité. Montrer que f_n est mesurable et converge simplement vers f.

Si X est un espace vectoriel normé séparable, montrer qu'on peut ajouter la condition $\|f_n(\omega)\| \le \|f(\omega)\|$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Exercice 18. On suppose que μ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, et on suppose que pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(\mathrm{A}) > 0$, il existe $\mathrm{B} \in \mathcal{A}$, $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ et $0 < \mu(\mathrm{B}) < \mu(\mathrm{A})$. Montrer que pour tout $c \in [0,1]$, il existe un ensemble $\mathrm{A}_c \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(\mathrm{A}_c) = c$.