Exercice 19. On rappelle que la lim sup d'une suite d'ensembles (A_n) est définie par

$$\limsup_n \mathrm{A}_n = \bigcap_n \bigcup_{m \geq n} \mathrm{A}_m.$$

Montrer qu'un ensemble $\mathrm{X} \subset \mathbb{R}$ est négligeable (Lebesgue) si et seulement s'il existe une suite d'intervalles (I_n) telle que

$$\sum |\mathrm{I}_n| < +\infty \quad \text{et} \quad \mathrm{X} \subset \limsup_n \mathrm{I}_n.$$

Exercice 20. On considère une fonction continue 1-périodique sur $\mathbb{R}$, et un nombre irrationnel $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(j\alpha) = \int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Généraliser au cas d'un couple (α, β) et d'une fonction g continue de deux variables telle que $g(x+1, y) = g(x, y+1) = g(x, y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 21. Démontrer le théorème dit *de Mertens* : si $\sum |a_n| < +\infty$ et si la série $\sum b_n$ est convergente (simplement), alors la *série produit* $\sum c_n$ dont le terme général est

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$$

est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Bigr)\Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\Bigr).$$

(*Indication :* exprimer les sommes partielles de la série produit au moyen des a_j et des sommes partielles de la série $\sum b_n$; penser au théorème de convergence dominée).

Montrer que le théorème ne subsiste pas si on suppose seulement que les deux séries sont simplement convergentes.

Exercice 22. On suppose donnée une fonction f sur $[0,1]$ telle que $0 < f(x) \leq 1 - x$ pour tout $x \in [0,1]$. Pour chaque $x \in [0,1[$ on pose $x^+ = x + f(x)$. On a donc $x < x+ \leq 1$ pour tout $x \in [0,1[$. Montrer que l'intervalle semi-ouvert $[0,1[$ est réunion d'une suite d'intervalles de la forme $[x_n, x_n^+[$, deux à deux disjoints (peut-être une suite finie).

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et soit $([x_n, y_n[)_{n \geq 0}$ un recouvrement de $[0,1[$ en intervalles deux à deux disjoints, tels que $0 \leq x_n < y_n \leq 1$ et $f(y_n) - f(x_n) \geq u_n$ pour tout $n \geq 0$, où $\sum |u_n| < +\infty$. Montrer que $f(1) - f(0) \geq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On suppose que f continue sur $[0,1]$ possède une dérivée à droite > 0, sauf peut-être aux points d'un ensemble dénombrable $\mathrm{D} = (d_n)_{n \geq 0} \subset [0,1]$. Montrer qu'à tout $x \in [0,1[$ on peut associer x^+, de façon que $x < x^+ \leq 1$, et que $f(x^+) > f(x)$ si $x \notin \mathrm{D}$ et $f(x^+) - f(x) > -\varepsilon 2^{-n}$ si $x = d_n$. En déduire que $f(1) \geq f(0)$.

On suppose que f continue sur $[0,1]$ possède une dérivée à droite ≥ 0, sauf peut-être aux points d'un ensemble dénombrable $\mathrm{D} = (d_n)_{n \geq 0} \subset [0,1]$. Montrer que f est croissante (au sens large) sur $[0,1]$ (ce théorème a été énoncé par Dini, démontré pour la première fois en toute généralité par Ludwig Scheeffer vers 1885 ; l'idée de démonstration précédente figure dans le livre de Lebesgue de 1904, *Leçons sur la théorie de l'intégration et la recherche des fonctions primitives*).

Exercice 3 bis : exercice 3 dézippé.

Si I est un intervalle contenu dans $[0,1]$, on note $\ell(\mathrm{I})$ sa longueur ; on dira qu'un ensemble $\mathrm{B} \subset [0,1]$ est *simple* si c'est une réunion finie d'intervalles disjoints, et dans ce cas la mesure $\ell(\mathrm{B})$ de cet ensemble est la somme des longueurs de ces intervalles. Si X est un sous-ensemble de $[0,1]$, la *mesure extérieure de* X, notée $\lambda^*(\mathrm{X})$, est la borne inférieure des nombres m tels qu'il existe une famille finie ou dénombrable d'intervalles ouverts $(\mathrm{I}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ telle que

$$\mathrm{X} \subset \bigcup_{\alpha\in\mathrm{A}} \mathrm{I}_\alpha \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \ell(\mathrm{I}_\alpha) < m.$$

a. Montrer que $\lambda^*(\mathrm{B}) = \ell(\mathrm{B})$ quand B est simple ; pour montrer que $\ell(\mathrm{B}) \le \lambda^*(\mathrm{B})$, on commencera par le cas où B est fermé, donc compact (penser à Borel-Lebesgue).

b. Montrer que

$$\lambda^*\big(\bigcup_{\alpha\in\mathrm{A}} \mathrm{X}_\alpha\big) \le \sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \lambda^*(\mathrm{X}_\alpha)$$

pour toute famille finie ou dénombrable $(\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ de sous-ensembles de $[0,1]$.

c. Si X, Y sont deux sous-ensembles de $[0,1]$, on introduit leur *différence symétrique*

$$\mathrm{X} \bigtriangleup \mathrm{Y} = (\mathrm{X} \setminus \mathrm{Y}) \cup (\mathrm{Y} \setminus \mathrm{X})\,;$$

montrer que $\mathbf{1}_{\mathrm{X}\bigtriangleup\mathrm{Y}} = \big|\mathbf{1}_\mathrm{X} - \mathbf{1}_\mathrm{Y}\big|$; montrer que si Z est un troisième sous-ensemble de $[0,1]$, on a

$$\mathrm{X} \bigtriangleup \mathrm{Z} \subset (\mathrm{X} \setminus \mathrm{Y}) \cup (\mathrm{Y} \setminus \mathrm{Z}) \;\; \text{et} \;\; \lambda^*(\mathrm{X} \bigtriangleup \mathrm{Z}) \le \lambda^*(\mathrm{X} \setminus \mathrm{Y}) + \lambda^*(\mathrm{Y} \setminus \mathrm{Z}).$$

Montrer que $|\lambda^*(\mathrm{X}) - \lambda^*(\mathrm{Y})| \le \lambda^*(\mathrm{X} \bigtriangleup \mathrm{Y})$.

On dira qu'une suite (B_n) d'ensembles simples contenus dans $[0,1]$ *tend en mesure* vers un ensemble $\mathrm{X} \subset [0,1]$ si la mesure extérieure de la différence symétrique $\mathrm{X} \bigtriangleup \mathrm{B}_n$ tend vers 0.

d. Montrer que dans ce cas, la suite $\ell(\mathrm{B}_n)$ tend vers une limite, et que cette limite ne dépend pas de la suite (B_n) particulière : on la notera $\lambda(\mathrm{X})$.

On désigne par $\mathcal{M}$ la collection $\mathcal{M}$ des sous-ensembles X de $[0,1]$ qui sont limite en mesure d'une suite (B_n) d'ensembles simples.

e. Vérifier que $\mathcal{M}$ est stable par passage au complémentaire ; si (B_n) tend en mesure vers X et (C_n) vers Y, et si X et Y sont disjoints, montrer que $\ell(\mathrm{B}_n \cap \mathrm{C}_n)$ tend vers 0. Montrer que $\lambda^*(\mathrm{X}) = \lambda(\mathrm{X})$ quand $\mathrm{X} \in \mathcal{M}$.

En déduire que $\mathcal{M}$ est une tribu, et que λ est une mesure sur $\mathcal{M}$ qui prolonge ℓ.