

Exercice 1. Soit f une fonction continue et croissante de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} ; on suppose que la dérivée $f'(x)$ existe pour presque tout $x \in]0, 1[$ (pour la mesure de Lebesgue). Montrer que

$$f(1) - f(0) \geq \int_0^1 f'(t) dt.$$

Exercice 2. Soit φ une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} telle que $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$; montrer que la fonction

$$x \rightarrow \frac{\varphi(x)}{x^2}$$

convenablement prolongée en 0, est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

Exercice 3. Si f est mesurable ≥ 0 et $p \geq 1$ montrer que

$$\int f^p d\mu = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \mu(\{f > t\}) dt.$$

Exercice 4. Si f et g sont intégrables sur \mathbb{R} posons

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad G(x) = \int_{-\infty}^x g(t) dt.$$

Montrer que pour tous $a < b$ réels on a

$$\int_a^b F(t)g(t) dt = [FG]_a^b - \int_a^b f(t)G(t) dt.$$

Exercice 5. Si A est un borélien borné de \mathbb{R}^d et g une fonction borélienne bornée sur \mathbb{R}^d , on peut poser pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$(\mathbf{1}_A * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_A(x-t)g(t) dt.$$

Montrer que la fonction $\mathbf{1}_A * g$ est continue. Si A est de mesure positive, montrer que l'ensemble $A - A = \{a_1 - a_2 : a_1, a_2 \in A\}$ est un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^d .

Exercice 6. On considère une fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$, et l'opérateur linéaire borné T_g de $L^1(\mathbb{R})$ dans lui-même donné par

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}), \quad T_g(f) = f * g.$$

a. Montrer que $\|T_g\|_{\mathcal{L}(L^1)} = \|g\|_1$.

b. On suppose maintenant que g est 2π -périodique intégrable sur chaque période, et que g agit par convolution *périodique* sur les fonctions continues 2π -périodiques : pour toute $f \in C_{2\pi\text{-per}}$ on pose $S_g(f) = f *_{\text{per}} g$. Montrer que la norme de l'opérateur S_g , agissant de $C_{2\pi\text{-per}}$ dans lui-même, est égale à la norme de g dans $L^1(0, 2\pi)$.

c. Dédurre du théorème de Banach-Steinhaus qu'il existe des fonctions 2π -périodiques continues sur \mathbb{R} dont la série de Fourier ne converge pas au point 0 (par exemple).

Exercice 7.

a. Inégalité de Hölder pour trois fonctions : on suppose que les nombres $\alpha, \beta, \gamma > 0$ vérifient $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Montrer que pour toutes fonctions mesurables positives u, v, w sur un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ on a

$$\int u^\alpha v^\beta w^\gamma d\mu \leq \left(\int u d\mu \right)^\alpha \left(\int v d\mu \right)^\beta \left(\int w d\mu \right)^\gamma.$$

b. On suppose que $\alpha, \beta, \gamma > 0$ vérifient $\alpha + \beta + \gamma = 2$. Montrer que pour toutes fonctions mesurables positives U, V, W sur \mathbb{R}^d on a

$$\int U(x-y)^\alpha V(y)^\beta W(x)^\gamma dx dy \leq \left(\int U(x) dx \right)^\alpha \left(\int V(x) dx \right)^\beta \left(\int W(x) dx \right)^\gamma.$$

En déduire que si $p, q, r \geq 1$ et $1/p + 1/q = 1 + 1/r$, on a $L^p * L^q \subset L^r$, et plus précisément $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ (inégalité de convolution de Young).

Indication pour un cas particulier, $\alpha = \beta = \gamma = 2/3$: on écrit le produit

$$U(x-y)^{2/3} V(y)^{2/3} W(x)^{2/3}$$

comme produit des trois termes $(U(x-y)V(y))^{1/3}$, $(V(y)W(x))^{1/3}$ et $(U(x-y)W(x))^{1/3}$, on applique l'inégalité de Hölder pour trois fonctions avec les exposants $1/3, 1/3, 1/3$.

Exercice 8. On suppose que les espaces X, Y sont munis de mesures σ -finies μ, ν , et que $0 < r < p < +\infty$. Montrer que pour toute fonction mesurable positive f sur $X \times Y$ on a

$$\left(\int_X \left(\int_Y f(x, y)^r d\nu(y) \right)^{p/r} d\mu(x) \right)^{1/p} \leq \left(\int_Y \left(\int_X f(x, y)^p d\mu(x) \right)^{r/p} d\nu(y) \right)^{1/r}.$$

Exercice 9. Un poids δ sur $[0, 1]$ est une fonction > 0 sur $[0, 1]$ quelconque ; un intervalle pointé est le couple $([u, v], w)$ d'un intervalle $[u, v]$ et d'un point $w \in [u, v]$. On dit que l'intervalle pointé $([u, v], w)$ est δ -fin si $v - u < \delta(w)$. Une subdivision pointée de $[0, 1]$ consiste en la donnée de points $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ et de points $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \dots, n$. On dit qu'une subdivision pointée est δ -fine si chaque intervalle pointé $([x_{j-1}, x_j], \xi_j)$ de la subdivision est δ -fin.

a. Montrer que pour tout poids δ il existe une subdivision pointée δ -fine de $[0, 1]$.

On dit qu'une fonction f réelle sur $[0, 1]$ est RC-intégrable (RC pour *Riemann complete*) s'il existe une valeur I telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un poids δ tel que

$$\left| I - \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) f'(\xi_j) \right| < \varepsilon$$

pour toute subdivision pointée $([x_{j-1}, x_j], \xi_j)_{j=1}^n$ de $[0, 1]$ qui est δ -fine. On posera

$$I = (\text{RC}) \int_0^1 f(t) dt.$$

b. Montrer que la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$ de l'ensemble des rationnels de $[0, 1]$ est RC-intégrable d'intégrale nulle (énumérer les rationnels de $[0, 1]$ et fabriquer un poids qui donne au n ème rationnel r_n une importance qui tend vers 0).

c. Soit f une fonction dérivable sur $[0, 1]$, et soit $\varepsilon > 0$; montrer qu'il existe un poids δ tel que

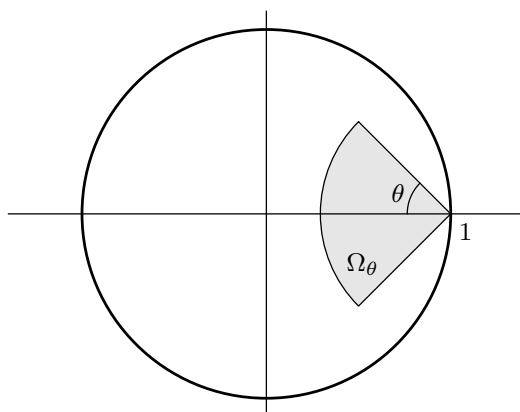
$$|f(v) - f(u) - f'(w)(v - u)| < \varepsilon(v - u)$$

pour tout intervalle pointé $([u, v], w)$ qui est δ -fin. Montrer que f' est RC-intégrable et

$$f(1) - f(0) = (\text{RC}) \int_0^1 f'(t) dt.$$

Exercice 10. Pour $0 < \theta < \pi/2$ on considère la partie de \mathbb{C} définie par

$$\Omega_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(1 - z)| < \theta, |1 - z| < \cos \theta\}.$$



a. Montrer que Ω_θ est contenu dans le disque unité, et plus précisément

$$|z|^2 < 1 - |1 - z| \cos \theta$$

pour tout $z \in \Omega_\theta$.

b. On suppose que $\sum a_n$ est une série convergente à termes complexes, et on pose pour $|z| < 1$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Évaluer $f(z) - S$ en introduisant les restes $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$ (transformation d'Abel). Borner la quantité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |z^n - z^{n+1}|$$

lorsque $z \in \Omega_\theta$ et en déduire que $f(z)$ tend vers S quand z tend vers 1 par valeurs dans le domaine Ω_θ .

c. Si les séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ sont convergentes ainsi que la série produit $\sum c_n$, montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$