Exercice 1. On donne une fonction mesurable $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, intégrable sur tout intervalle borné, mais telle que

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

On introduit la fonction F, définie sur $\mathbb{R}$ par la donnée de $\mathrm{F}(0)$ et par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

(qu'il faut comprendre comme $\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) - \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[x,0]}(t) f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x < 0$; quand la fonction f est continue, f est la dérivée de F). Montrer que pour toute fonction borélienne $g \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, on a la formule « de changement de variable »

$$\int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} g(\mathrm{F}(x)) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Indication : on définira une mesure μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ par la formule

$$\forall \mathrm{B} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \quad \mu(\mathrm{B}) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\mathrm{B}}(\mathrm{F}(x)) f(x)\,\mathrm{d}x\,;$$

et on donnera une formule pour l'intégrale de g par rapport à μ ; de plus, pour tous $a < b$ on calculera $\mu([a, b])$.

Exercice 2. On munit $\mathbb{R}^d$ de la norme euclidienne $x \to \|x\|$, et on désigne par v_d le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$ pour la mesure de Lebesgue. Si f est une fonction continue sur $[0, +\infty[$, à support compact, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\|x\|)\,\mathrm{d}x = d\, v_d \int_0^{+\infty} f(r) r^{d-1}\,\mathrm{d}r.$$

Calculer v_d en utilisant $f(r) = \mathrm{e}^{-r^2/2}$ dans la formule précédente (et la fonction Γ).

Exercice 3.

a. Soit f une fonction concave positive de classe C^2 sur l'intervalle $[-1, 1]$, telle que f'' soit convexe ; montrer que

$$|f'(0)| \leq f(0)\,; \qquad |f''(0)| \leq 3 f(0).$$

Indication : pour la deuxième inégalité, on utilisera la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre deux entre les points 0 et 1 (ou entre -1 et 0), et une majoration sur $[0, 1]$ (ou sur $[-1, 0]$) de la fonction convexe f'' par une fonction affine.

b. Quelle inégalité obtient-on si on remplace $[-1, 1]$ par un intervalle $[-h, h]$?

c. Si f est positive, de classe C^∞ sur $[-a-h, a+h]$, et si $(-1)^k f^{(2k)} \geq 0$ sur $[-a-h, a+h]$ pour tout entier $k \geq 1$, montrer qu'il existe une constante C (dépendant de h) telle que

$$\forall n \geq 1, \quad \sup_{|x| \leq a} |f^{(n)}(x)| \leq \mathrm{C}^n \sup_{|x| \leq a} |f(x)|.$$

d. En déduire que si f est de classe C^∞ sur un intervalle ouvert I, et si $(-1)^k f^{(2k)} \geq 0$ sur I pour tout entier $k \geq 0$, alors f est analytique sur I ; plus précisément, montrer que si $\mathrm{I} =]x_0 - r, x_0 + r[$ pour un $r > 0$, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

pour tout $x \in \mathrm{I}$ (variante du théorème de Bernstein).

Exercice 4 : formule d'Euler-MacLaurin. On considère la suite de polynômes (P_n) définie par

$$\mathrm{P}_0 = 1, \quad \text{et} \quad \mathrm{P}'_{n+1} = \mathrm{P}_n, \quad \int_0^1 \mathrm{P}_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

pour tout entier $n \geq 0$. Déterminer P_1 ; vérifier que le polynôme $\mathrm{B}_n = n!\,\mathrm{P}_n$ est unitaire de degré n (*polynôme de Bernoulli*).

a. Si f est de classe C^{n+1} sur $[0,1]$, montrer que

$$(1) \qquad \begin{aligned} f(1) - f(0) = {} & \frac{f'(0)+f'(1)}{2} - \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \mathrm{P}_k(0)\big(f^{(k)}(1) - f^{(k)}(0)\big) \\ & + (-1)^n \int_0^1 \mathrm{P}_n(t) f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

b. En appliquant la formule (1) à la fonction $x \to \mathrm{e}^{-\lambda x}$, montrer que le DL au voisinage de 0 à tout ordre n de la fonction $\lambda \to \lambda/(\mathrm{e}^{\lambda}-1)$ est donné par

$$\frac{\lambda}{\mathrm{e}^{\lambda}-1} = \frac{\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}} = \sum_{k=0}^{n} c_k \lambda^k + \mathrm{O}(\lambda^{n+1}),$$

où on a posé $c_0 = 1$, $c_1 = \mathrm{P}_1(0) = -1/2$ et $c_k = \mathrm{P}_k(0)$ pour tout $k \geq 2$. Montrer que la fonction $\lambda \to \lambda/2 + \lambda/(\mathrm{e}^{\lambda}-1)$ est paire. En déduire que $c_{2k+1} = 0$ pour tout $k \geq 1$.

c. Récrire la formule (1) avec les polynômes de Bernoulli B_n et les nombres de Bernoulli $b_n = \mathrm{B}_n(0)$, en tenant compte de la remarque précédente.

d. Désignons par B_n^* la fonction 1-périodique sur $\mathbb{R}$ qui est égale à $x \to \mathrm{B}_n(x)$ quand $0 \leq x < 1$. Si f est de classe C^{2n+1} sur l'intervalle $[p,q]$, avec $p < q$ entiers, montrer que

$$\begin{aligned} f(q) - f(p) = {} & \frac{f'(p)}{2} + f'(p+1) + \cdots + f'(q-1) + \frac{f'(q)}{2} \\ & - \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k)}(q) - f^{(2k)}(p)\right) + \int_p^q \frac{\mathrm{B}_{2n}^*(t)}{(2n)!} f^{(2n+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Exercice 5 : théorème de Borel. Pour les besoins de l'exercice, on appellera *série de fonctions de type* (B) toute série de fonctions sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$(\beta) \qquad x \in \mathbb{R} \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}\,\theta(b_n x)$$

où $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de nombres réels ou complexes, (b_n) une suite de réels > 1 telle que $\ln(1+|a_n|) = \mathrm{O}(\ln(b_n))$ quand $n \to +\infty$, et où θ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $[-1,1]$.

a. Montrer que toute série de type (B) est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. *Indication :* on notera que pour borner uniformément $x^n\theta(b_n x)$, seuls comptent les x tels que $|x| \leq 1/b_n$.

b. On suppose de plus que la fonction θ de la série (β) est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; montrer que la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}\,\theta(b_n x)$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et que sa dérivée peut se calculer par dérivation terme à terme. *Indication :* on notera que la série dérivée de la série (β) s'exprime comme la somme de deux séries qui sont encore de type (B).

c. En déduire par récurrence que si θ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, la fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, et que ses dérivées peuvent se calculer par dérivations terme à terme successives.

d. On suppose de plus, pour finir, que θ est C^∞ et égale à 1 dans un voisinage de 0. Montrer que

$$f^{(n)}(0) = a_n$$

pour tout $n \geq 0$.

e. Étant donnée une suite (a_n) quelconque, montrer qu'il existe une fonction f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ qui admet ces nombres comme dérivées successives au point 0.

Exercice 6. Montrer qu'il existe un nombre L tel que pour tout $\delta \in]0, \pi]$, on ait

$$\lim_n \sqrt{n} \int_{-\delta}^{\delta} \Big(\frac{1+\cos x}{2}\Big)^n \, \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = \mathrm{L}.$$

En déduire que la suite de fonctions (φ_n) définie par

$$\varphi_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{\mathrm{L}} \Big(\frac{1+\cos x}{2}\Big)^n$$

est une approximation de l'unité 2π-périodique. Si f est 2π-périodique et intégrable sur chaque période, et a tous ses coefficients de Fourier nuls, montrer que f est nulle presque-partout.

Exercice 7. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 8. Déterminer les racines du polynôme

$$\mathrm{P}_{n-1} = \frac{1}{n}\big(\mathrm{X}^n - (\mathrm{X}-1)^n\big) = \mathrm{X}^{n-1} - \frac{n-1}{2}\,\mathrm{X}^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{6}\,\mathrm{X}^{n-3} + \cdots$$

puis calculer la somme σ_n des carrés des racines grâce aux relations entre coefficients et racines. Que trouve-t-on quand $n \to +\infty$, en comparant les deux expressions trouvées pour $n^{-2}\sigma_n$?

Exercice 9. Soit f une fonction 2π-périodique, continue et C^1 par morceaux ; montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,.$$

Exercice 10. On donne un paramètre réel ou complexe $a \notin 2\pi\mathbb{Z}$, et on définit une fonction 2π-périodique f_a sur $\mathbb{R}$ en posant

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \quad f_a(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\,.$$

Expliciter le résultat obtenu en appliquant le théorème de convergence de Dirichlet à la fonction f_a au point $x = \pi$.

Exercice 11. Pour chaque entier $k \geq 1$ définissons une fonction f_k **paire**, continue et 2π-périodique par

$$f_k(x) = \sin(kx + x/2)$$

lorsque $0 < x < \pi$. Montrer que si $\ell \neq k$,

$$(\mathrm{S}_\ell f_k)(0) = (\mathrm{S}_k f_\ell)(0).$$

Si $2k \leq \ell$, montrer que pour $n \leq k$ on a

$$|c_n(f_\ell)| \leq \frac{4}{(2k+1)\pi} \quad \text{donc} \quad |(\mathrm{S}_k f_\ell)(0)| \leq \frac{4}{\pi}.$$

Montrer qu'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que $(\mathrm{S}_\ell f_\ell)(0) \geq \kappa \ln \ell$ pour tout $\ell \geq 1$, et conclure que $(\mathrm{S}_n f)(0)$ ne converge pas pour la fonction f continue de l'exemple de Fejér,

$$f = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{f_{2^{p^3}}}{p^2}.$$

Exercice 12. Le polynôme de Tchebychev T_n est déterminé par le fait que pour tout θ réel, on a $\mathrm{T}_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$. Montrer qu'on a aussi

$$\mathrm{T}_n(\operatorname{ch}\theta) = \operatorname{ch}(n\theta)$$

pour tout θ, et que pour $x \geq 1$,

$$\mathrm{T}_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n}{2}.$$

Exercice 13. Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x < +\infty$ pour tout nombre réel a ; montrer que la transformée de Fourier de f se prolonge au plan complexe et que ce prolongement, qu'on notera

$$\widehat{f}(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xz}\, \mathrm{d}x$$

est la somme d'une série entière de rayon de convergence infinie.

Appliquer cette remarque à la fonction gaussienne $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$; montrer que $\widehat{f}(\mathrm{i}t)$ se calcule explicitement pour t réel, et en déduire la valeur de $\widehat{f}(t)$.