Exercice 1 : distance de Hausdorff. Soient (X, d) un espace métrique non vide et x_0 un point fixé dans X ; on désignera par $\mathcal{F}_b$ l'ensemble des fermés F non vides de X qui sont *bornés pour la distance* d, c'est-à-dire tels que $\sup_{y \in \mathrm{F}} d(y, x_0) < +\infty$. À chaque fermé $\mathrm{A} \in \mathcal{F}_b$ on associe la fonction φ_A définie sur X par

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad \varphi_\mathrm{A}(x) = d(x, \mathrm{A}) - d(x, x_0) = \inf\{d(x, a) - d(x, x_0) : a \in \mathrm{A}\}.$$

a. Montrer que φ_A est bornée sur X. Montrer que pour tous $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{F}_b$ on a

$$\|\varphi_\mathrm{A} - \varphi_\mathrm{B}\|_\infty = \max\bigl(\sup\{d(a, \mathrm{B}) : a \in \mathrm{A}\}, \sup\{d(b, \mathrm{A}) : b \in \mathrm{B}\}\bigr).$$

En déduire que la quantité précédente, qu'on notera $h(\mathrm{A}, \mathrm{B})$, est une distance sur l'ensemble $\mathcal{F}_b$ (c'est la *distance de Hausdorff* entre sous-ensembles fermés).

b. On suppose que (X, d) est complet ; montrer que $\mathcal{F}_b$ est complet pour la distance de Hausdorff.

Indication : considérer une suite de Cauchy (A_k) telle que $h(\mathrm{A}_k, \mathrm{A}_{k+1}) < 2^{-k-1}$ pour tout $k \geq 0$, et l'ensemble A des points $a \in \mathrm{X}$ qui sont limite d'une suite (a_k) avec $a_k \in \mathrm{A}_k$ pour tout $k \geq 0$. Montrer que tout point $a_k \in \mathrm{A}_k$ est à distance $< 2^{-k}$ d'un point de A (introduire une suite convergente de points $(a_n)_{n \geq k}$ avec $a_n \in \mathrm{A}_n$ en utilisant la définition de $h(\mathrm{A}_n, \mathrm{A}_{n+1})$). De façon analogue, montrer que tout point $a \in \mathrm{A}$ est à distance $< 2^{-k} + \varepsilon$ d'un point de A_k, pour tout $\varepsilon > 0$.

Exercice 2 : régularité des mesures sur la tribu borélienne d'un polonais. Soit μ une probabilité sur la tribu borélienne d'un espace métrique (X, d) complet et séparable ; le but de l'exercice est de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $\mathrm{K}_\varepsilon \subset \mathrm{X}$ tel que $\mu(\mathrm{K}_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$.

a. Montrer que pour tous $r > 0$ et $\alpha > 0$, il existe un fermé F de X qui est contenu dans une réunion finie de boules de rayon r, et qui est tel que $\mu(\mathrm{F}) > 1 - \alpha$.

Indication : soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite dense dans X ; posons $\mathrm{A}_n = \bigcup_{i=0}^n \mathrm{B}(x_i, r/2)$. La suite (A_n) est croissante et recouvre X, parce que la suite (x_n) est dense.

b. Conclure en appliquant ce qui précède avec $r = 2^{-k}$ et $\alpha = \varepsilon/2^{k+1}$, pour tout $k \geq 0$.

Indication : on obtient ainsi une suite (F_k) de fermés telle que $\mu(\mathrm{F}_k) > 1 - 2^{-k-1}\varepsilon$ pour tout entier $k \geq 0$; considérer $\mathrm{K} = \bigcap_{k \geq 0} \mathrm{F}_k$.

Exercice 3 : la base de Haar pour $\mathrm{L}^2(0,1)$. On définit la fonction φ sur $\mathbb{R}$ en posant $\varphi(x) = 1$ si $x \in [0, 1/2[$, $\varphi(x) = -1$ si $x \in [1/2, 1[$, et φ nulle ailleurs sur $\mathbb{R}$. Pour $n \geq 0$ et $j = 0, \ldots, 2^n - 1$, on pose

$$\forall x \in [0, 1[, \quad h_{n,j}(x) = 2^{n/2} \varphi(2^n x - j).$$

Montrer que la famille de fonctions formée de $\mathbf{1}$ et de toutes les fonctions $h_{n,j}$, $n \geq 0$ et $j = 0, \ldots, 2^n - 1$, est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(0,1)$.

Exercice 4. On définit une suite de matrices en posant $A_0 = (1)$ (matrice de taille 1×1) puis pour tout $n \geq 0$
$$A_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} A_n & A_n \\ -A_n & A_n \end{pmatrix}.$$
Montrer que A_n est orthogonale pour tout n, de déterminant égal à 1.

On définit une fonction φ sur $\mathbb{R}$ en posant $\varphi(x) = 1$ sur $[2k, 2k+1[$, $k \in \mathbb{Z}$ et $\varphi(x) = -1$ sinon ; on pose ensuite pour tout $x \in [0, 1[$,
$$\varepsilon_n(x) = \varphi(2^n x)$$
pour tout $n \geq 1$. Pour tout ensemble fini $A \subset \mathrm{N}^*$, on pose
$$\forall x \in [0, 1[, \quad w_A(x) = \prod_{j \in A} \varepsilon_j(x)$$
(sans oublier l'ensemble vide, pour lequel $w_\emptyset = \mathbf{1}$). Montrer que la famille de toutes les fonctions (w_A) est une base hilbertienne de $L^2(0, 1)$.

Exercice 5. On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$, borné ou non, et une mesure μ sur I, de la forme $\mathrm{d}\mu(x) = w(x)\,\mathrm{d}x$, où w est une fonction > 0 sur I, mesurable à valeurs finies. On suppose qu'il existe une valeur $\alpha > 0$ telle que
$$\int_I \mathrm{e}^{\alpha|x|}\, w(x)\,\mathrm{d}x < +\infty.$$
a. Montrer que l'espace $L^2(I, \mu)$ contient toutes les fonctions polynomiales. Montrer que le sous-espace des fonctions polynomiales est dense dans $L^2(I, \mu)$. *Indication* : si $f \in L^2(I, \mu)$ est orthogonale à tous les polynômes, montrer que la fonction holomorphe g définie pour $|\operatorname{Re} z| < \alpha/2$ par
$$g(z) = \int_I \mathrm{e}^{zx} f(x)\, w(x)\,\mathrm{d}x$$
est nulle ; en déduire que $\widehat{f}$ est nulle, donc f aussi. Montrer qu'il existe une base hilbertienne de $L^2(I, \mu)$ formée de polynômes orthogonaux.

b. Montrer que le résultat s'applique lorsque $I = \mathbb{R}$ et $w(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ (mesure gaussienne, polynômes d'Hermite).

Exercice 6 : déterminants de Gram. Soient $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ des vecteurs d'un espace de Hilbert, tels que $F = \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ soit de dimension n ; montrer que la distance de x_{n+1} au sous-espace F est donnée par la formule
$$\operatorname{dist}^2(x_{n+1}, F) = \frac{\det\big(\langle x_i, x_j\rangle\big)_{i,j=1,\ldots,n+1}}{\det\big(\langle x_i, x_j\rangle\big)_{i,j=1,\ldots,n}}.$$

Exercice 7. Si une fonction f continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ vérifie une condition de Hölder d'ordre $\alpha > 1/2$, c'est-à-dire qu'il existe un nombre M tel que
$$\forall x, y \in [0, 2\pi], \quad |f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y|^\alpha,$$
montrer que ses coefficients de Fourier sont absolument sommables.

Indication : considérer pour t fixé dans $(0, 2\pi)$ la fonction $g_t(x) = (f(x-t) - f(x))/t^\alpha$; lui appliquer Parseval, puis intégrer par rapport à $\mathrm{d}t/t^\beta$ le résultat obtenu, $0 < \beta < 1$. En déduire d'abord, pour tout $\varepsilon > 0$
$$\sum n^{2\alpha - \varepsilon}\, |c_n(f)|^2 < +\infty.$$

Exercice 8. Soit f une fonction de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ nulle hors de $[-\pi, \pi]$, et désignons par f_0 la fonction 2π-périodique qui coïncide avec f sur $[-\pi, \pi[$; exprimer les coefficients de Fourier $c_n(f_0)$ de la fonction f_0 à partir de la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f. Appliquer la relation de Bessel-Parseval à f_0 pour évaluer

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x$$

à partir de certaines valeurs de $\widehat{f}$. Pour chaque $s \in [0,1]$, appliquer le calcul précédent à la fonction $f_s(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}$. Intégrer le résultat en $s \in [0,1]$; qu'obtient-on ?

Exercice 9.
a. Calculer les coefficients de Fourier complexes de la fonction 2π-périodique égale à $\mathbf{1}_{[0,\pi[}$ sur $[0, 2\pi[$.
b. On considère le sous-ensemble borné A de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\mathrm{A} = \{(s\cos\theta, s\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq f(\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

où f est une fonction continue 2π-périodique > 0. Exprimer par une intégrale de la forme $\int_\alpha^\beta k(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ la surface de la partie de A correspondant aux points $(s\cos\theta, s\sin\theta)$ tels que $0 \leq s \leq f(\theta)$ et $\alpha \leq \theta \leq \beta$, où $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$.
c. On suppose maintenant que A possède la propriété suivante : toute droite passant par 0 découpe A en deux parties de même surface. Montrer que l'ensemble A est symétrique par rapport à l'origine (autrement dit, la fonction f vérifie $f(\theta) = f(\theta + \pi)$).

Exercice 10. On suppose que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que f, f', f'' sont intégrables. Montrer que $\widehat{f}(t)$ est $\mathrm{O}(|t|^{-2})$ lorsque $|t| \to +\infty$.

Exercice 11. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)/x$. On sait que l'intégrale de f est semi-convergente et on pose

$$\ell = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x.$$

a. Montrer que la fonction f est dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.
b. Montrer que

$$g(t) = \lim_n \int_{-n}^{n} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}x$$

existe pour tout t, et calculer sa valeur (en fonction de t et de ℓ).
c. Déduire la valeur de ℓ de la formule d'inversion et du fait que f est la transformée de Fourier de $\frac{1}{2}\mathbf{1}_{(-1,1)}$.

Exercice 12 : formule de Poisson. Soit G une fonction paire positive sur $\mathbb{R}$, décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et telle que $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{G}(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$; soit F une fonction continue sur $\mathbb{R}$, telle que $|\mathrm{F}(x)| \leq \mathrm{G}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
a. Montrer que la fonction $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{F}(x+2\pi n)$ est définie, continue et 2π-périodique.
b. Trouver une relation entre les valeurs $\widehat{\mathrm{F}}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ et les coefficients de Fourier de f.
c. On suppose de plus que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\mathrm{F}}(n)| < +\infty$. Démontrer la *formule de Poisson*,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{F}(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\mathrm{F}}(n).$$

Expliciter l'égalité obtenue en appliquant à $\mathrm{F}(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$, $a > 0$, puis étendre au cas a complexe.

Exercice 13.
a. Pour tout $\varepsilon > 0$ on considère la fonction f_ε définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\varepsilon(x) = \frac{\mathbf{1}_{|x|>\varepsilon}}{\pi x}.$$

Vérifier que f_ε est dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et calculer sa transformée de Fourier.

b. Montrer que pour toute $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ la convolution $g * f_\varepsilon$ tend vers une limite $\mathrm{H}g$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ quand $\varepsilon \to 0$. Montrer que H définit une application linéaire continue de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, isométrique ; déterminer H^2.

c. Montrer que si θ est à support compact, paire, égale à 1 dans un voisinage de 0, on a pour toute φ fonction C^1 à support compact et tout $x \in \mathbb{R}$

$$(\mathrm{H}\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x-y) - \varphi(x)\theta(y)}{\pi y}\,\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\varphi(x-y)}{\pi y}\,\mathrm{d}y.$$

Exercice 14. On suppose que μ est une mesure infinie, et on désigne par X l'espace vectoriel $\mathrm{L}^2(\Omega,\mu) \cap \mathrm{L}^4(\Omega,\mu)$.

a. Montrer que X est complet pour la norme définie par $\|f\|_{\mathrm{X}} = \|f\|_2 + \|f\|_4$.

b. Montrer que toute fonction $g \in \mathrm{L}^2 + \mathrm{L}^{4/3}$, c'est-à-dire de la forme $g = g_0 + g_1$ avec $g_0 \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mu)$ et $g_1 \in \mathrm{L}^{4/3}(\Omega,\mu)$, définit une forme linéaire ξ continue sur X par la formule

$$\forall f \in \mathrm{X}, \quad \xi(f) = \int_\Omega f g \,\mathrm{d}\mu.$$

c. On suppose que ℓ est une forme linéaire continue sur X (muni de la norme précédente) et on définit une fonction réelle φ sur X en posant

$$\forall f \in \mathrm{X}, \quad \varphi(f) = \int_\Omega (f^2 + f^4)\,\mathrm{d}\mu - \ell(f)\,;$$

montrer que

$$m = \inf\{\varphi(f) : f \in \mathrm{X}\} > -\infty.$$

Vérifier que pour toutes $f, h \in \mathrm{X}$

$$\frac{1}{2}\big(\varphi(f+h) + \varphi(f-h)\big) - \varphi(f) \geq \int_\Omega (h^2 + h^4)\,\mathrm{d}\mu.$$

En déduire que le diamètre du fermé $\mathrm{F}_\varepsilon = \{\varphi \leq m + \varepsilon\} \subset \mathrm{X}$ tend vers 0 avec $\varepsilon > 0$, puis que φ atteint son minimum m en un point unique $f_0 \in \mathrm{X}$.

Montrer que la forme linéaire ℓ provient de la fonction $g = 2f_0 + 4f_0^3 \in \mathrm{L}^2 + \mathrm{L}^{4/3}$.

d. Pour $2 < p < 4$, montrer que X s'injecte continûment dans $\mathrm{L}^p(\Omega,\mu)$, avec image dense. En déduire que les formes linéaires sur $\mathrm{L}^p(\Omega,\mu)$ proviennent des fonctions de $\mathrm{L}^q(\Omega,\mu)$, $1/q + 1/p = 1$.