Exercice 1. On pose pour tout entier $n \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{P}_n(x) = \mathrm{e}^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \mathrm{e}^{-x^2} .$$

a. Montrer que P_n est un polynôme de degré n. Calculer P_0, P_1 et P_2.

b. Montrer que pour tout $n \geq 0$, la fonction $\varphi_n : x \to \mathrm{P}_n(x)\ \mathrm{e}^{-x^2/2}$ est un vecteur propre de la transformation de Fourier (on pourra utiliser une relation de récurrence entre φ'_n, φ_n et φ_{n+1}, et les rapports entre Fourier et dérivation). Quelles sont les valeurs propres possibles pour la transformation de Fourier $\mathcal{F}$, agissant sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$?

Exercice 2. On désigne par B une matrice complexe de taille $d \times d$, et par K l'ensemble de ses valeurs propres. On considère un chemin fermé γ dans $\mathbb{C}$ qui ne rencontre pas K et on lui associe la matrice

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma (z\mathrm{I}_d - \mathrm{B})^{-1}\, dz.$$

a. Montrer que pour r assez grand et $\gamma = \gamma_r$ (le parcours habituel du cercle de rayon r centré en 0), la matrice P est égale à la matrice unité I_d.

b. On suppose que γ parcourt (une fois) un cercle dans le sens direct, et que ce cercle contient exactement une valeur propre λ de B. Montrer que la matrice P est un projecteur sur le sous-espace caractéristique de B associé à la valeur propre λ.

c. Si γ est un chemin fermé qui ne rencontre pas K, montrer que la matrice P est une combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs de projecteurs caractéristiques.

Exercice 3. On désigne par U le disque unité ouvert du plan complexe. Soit f une fonction holomorphe de U dans U ; utiliser la série de Taylor de f en 0 et la théorie des séries de Fourier pour montrer que : on a $|f'(0)| \leq 1$, et si $|f'(0)| = 1$, alors il existe λ de module 1 tel que $f(z) = \lambda z$ pour tout $z \in \mathrm{U}$ (le lecteur aura reconnu le très classique *lemme de Schwarz*, sous un habillage peut-être moins classique).

Exercice 4. On suppose que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$ existe pour tout $z \in \mathbb{C}$; on suppose de plus que la partie réelle $g(z) = \mathrm{Re}\, f(z)$ vérifie une majoration de la forme

$$\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \exists \mathrm{M},\ \forall z \in \mathbb{C}, \quad |g(z)| \leq \mathrm{M}\,(1 + |z|^{\mathrm{N}}).$$

En déduire que f est un polynôme de degré $\leq$ N.

Indication : pour r tendant vers l'infini, utiliser Parseval pour majorer les coefficients de Fourier réels a_n, b_n de la fonction 2π-périodique définie par $\theta \in [0, 2\pi] \to g(r\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$.

Exercice 5. Soit $\mathrm{P}_t = a_0(t) + a_1(t)\,\mathrm{X} + \cdots + a_n(t)\,\mathrm{X}^n \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ un polynôme dont les coefficients sont des fonctions continues du paramètre t.

a. On suppose que P_0 n'a pas de racine sur le cercle unité et qu'il a exactement k racines dans le disque unité ouvert (comptées avec leur multiplicité). Montrer que pour t suffisamment proche de 0, le polynôme P_t n'a pas de racine sur le cercle unité et a exactement k racines dans le disque unité ouvert (comptées avec leur multiplicité). *Indication* : considérer la fraction rationnelle P'/P.

b. Si P_0 a n racines distinctes, montrer qu'il existe des fonctions $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$ complexes, définies et continues dans un voisinage de 0, qui décrivent les racines de P_t.

Exercice 6. Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$; calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

en utilisant l'holomorphie et un changement de contour (on introduira la demi-droite imaginaire $\mathbb{R}_+\,\mathrm{i}$; la fonction Γ devrait apparaître).

Exercice 7.
a. On considère un nombre complexe α tel que $\alpha^3 = 1$ et on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_\alpha(t) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\alpha t x - x^3/3}\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que la fonction f_α est développable en série entière de rayon infini ; calculer les coefficients (a_n) de cette série entière (au moyen de la fonction Γ) ; trouver une relation de récurrence entre a_n et a_{n+3}.
b. Calculer $f''_\alpha(t) - t\,f_\alpha(t)$. Trouver les combinaisons linéaires des trois fonctions f_α qui vérifient *l'équation différentielle d'Airy*

$$f''_\alpha(t) - t\,f_\alpha(t) = 0.$$

Exercice 8.
a. Soit φ une fonction de $\mathrm{L}^2(0, 2\pi)$, avec une série de Fourier de la forme $\sum_{n\ge 0} c_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ (autrement dit, tous ses coefficients de Fourier négatifs sont nuls) ; montrer qu'il existe une unique fonction holomorphe f dans le disque unité U du plan complexe telle que les fonctions φ_r, définies pour $r < 1$ par la formule $\varphi_r(\theta) = f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ convergent vers φ dans $\mathrm{L}^2(0, 2\pi)$, lorsque $r \to 1$.
b. Montrer que pour chaque fonction *réelle* $\psi \in \mathrm{L}^2(0, 2\pi)$ il existe une unique fonction réelle $\mathrm{H}(\psi) \in \mathrm{L}^2(0, 2\pi)$ d'intégrale nulle telle que la fonction $\varphi = \psi + \mathrm{i}\mathrm{H}(\psi)$ vérifie les conditions du paragraphe précédent. Montrer que H définit un opérateur linéaire borné sur $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}(0, 2\pi)$ et calculer sa norme.
c. Si ψ est d'intégrale nulle, montrer que $\int_0^{2\pi} \psi^2 - \int_0^{2\pi} (\mathrm{H}\psi)^2 = \int_0^{2\pi} \psi(\mathrm{H}\psi) = 0$. Si u est un polynôme trigonométrique réel et d'intégrale nulle, poser $v = \mathrm{H}u$ et déterminer $\mathrm{H}(u^2 - v^2)$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} \big(u^4(x) + v^4(x)\big)\,\mathrm{d}x = 6 \int_0^{2\pi} u^2(x) v^2(x)\,\mathrm{d}x$$

et en déduire que H est borné sur $\mathrm{L}^4(0, 2\pi)$ (noter que $2s^2t^2 \le \varepsilon^{-1}s^4 + \varepsilon t^4$).

Exercice 9 : injectivité de la transformation de Laplace. Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors d'un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ et telle que $x \to f(x)\,\mathrm{e}^{-s_0 x}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$ pour un $s_0 \in \mathbb{R}$; on définit la *transformée de Laplace* de la fonction f sur l'ouvert $\mathrm{U} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > s_0\}$ du plan complexe par

$$\forall z \in \mathrm{U}, \quad (\mathcal{L}f)(z) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-zx}\, f(x)\, dx.$$

Montrer que $\mathcal{L}f$ est holomorphe dans U. Montrer que si $\mathcal{L}f$ est nulle sur un intervalle non vide de $]s_0, +\infty[$, alors f est nulle presque partout sur $\mathbb{R}$ (on pourra apercevoir une transformée de Fourier).

Exercice 10. On se propose de démontrer la *formule d'inversion de Lagrange* : on suppose que f est holomorphe dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. On sait que f admet une fonction réciproque g holomorphe dans un voisinage de 0,

$$g(w) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n w^n$$

qui vérifie donc $g(0) = 0$ et $g(f(z)) = z$ pour z voisin de 0.

a. On pose $f(z) = z/p(z)$ avec p holomorphe non nulle au voisinage de 0 ; montrer la formule de Lagrange, qui dit que pour tout $n \geq 1$,

$$n!\, b_n = \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \, (p(z))^n \Big|_{z=0}$$

Indication : soit γ_0 le parcours d'un petit cercle centré en 0, et soit $\gamma_1 = f \circ \gamma_0$; partir de la formule

$$b_n = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\gamma_1} \frac{g(w)}{w^{n+1}} \, dw$$

et la transformer par le changement de variable $w = f(z)$ en une intégrale sur γ_0. On aura besoin de noter en route que $f(z)^{-n} - nzf'(z)f(z)^{-n-1}$ est une dérivée, donc a une intégrale nulle sur γ_0.

b. Appliquer la formule d'inversion au cas $f(z) = z\,\mathrm{e}^{-z}$ (calculer les coefficients de g, et le rayon de convergence de la série obtenue, qui s'appelle la *série de Lambert*).

Exercice 11. On considère une série numérique $\sum a_n$ telle que $u_n = |a_n| > 0$ pour tout entier $n \geq 0$, et $\sum u_n < +\infty$; on définit une fonction f dans $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ par

$$(1) \qquad \forall z \in \Omega, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n^2}{z - x_n},$$

où (x_n) est une suite de points réels.

a. Montrer que f est holomorphe dans Ω.

b. Borner $a_n^2/(z - x_n)$ lorsque $\operatorname{Re} z$ est hors de l'intervalle $[x_n - c\,u_n, x_n + c\,u_n]$, où $c > 0$.

On pose

$$\mathrm{N} = \bigcap_{c>0} \bigcup_{n=0}^{+\infty} [x_n - c\,u_n, x_n + c\,u_n].$$

c. Montrer que N est négligeable. On posera $\mathrm{X} = \mathbb{R} \setminus \mathrm{N}$; montrer que la série (1) converge normalement sur toute droite verticale définie par $\operatorname{Re} z = x$, $x \in \mathrm{X}$. Il est donc possible de prolonger f par continuité sur toutes ces droites.

d. On suppose maintenant que les a_n sont réels et que la suite (x_n) est dense dans $\mathbb{R}$. On considère un rectangle $\mathrm{R} = [x, y] \times [-1, 1]$ dans $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathrm{X}$. Montrer que

$$\frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\partial \mathrm{R}} f(z)\, dz = \sum_{n : x < x_n < y} a_n^2 > 0.$$

En déduire que pour tout point w de l'axe réel et tout $r > 0$, il est impossible de trouver une fonction holomorphe g dans $\mathrm{D} = \mathrm{B}(w, r)$ qui coïncide avec f dans $\Omega^+ \cap \mathrm{D}$ (où Ω^+ est l'ensemble $\operatorname{Im} z > 0$; la fonction g serait réelle sur $\mathrm{D} \cap \mathrm{X}$, donc sur $\mathrm{D} \cap \mathbb{R}$, donc $g(z) = \overline{g(\overline{z})}$... cet exercice est inspiré d'une partie de la thèse d'Émile Borel, 1894).

Exercice 12. Trouver une fonction nulle part dérivable à *valeurs complexes* est légèrement plus facile que dans le cas de fonctions à valeurs réelles ; c'est l'objet de cet exercice. On considère une suite croissante de réels $b_k > 0$ telle que b_{k+1}/b_k tende vers l'infini en croissant. Vérifier que les deux quantités

$$\Big(\sum_{j<k} b_j\Big)/b_k \quad \text{et} \quad b_k \sum_{j>k} 1/b_j$$

tendent vers 0 avec k ; vérifier que pour tout y réel on a $\left|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}y} - 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} + 1\right| \le y^2$.

On pose maintenant pour tout entier $j \ge 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_j(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi b_j x}}{b_j} \quad \text{puis} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi b_k x}}{b_k}.$$

Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}$. Si f est dérivable au point x, la quantité

$$\Delta_h(f) := \frac{f(x+2h)-f(x)}{2h} - \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{2h}$$

doit tendre vers $f'(x) - f'(x) = 0$ quand h tend vers 0. Si $h_k = 1/b_k$, montrer que

$$\left|\Delta_{h_k}(f_k)\right| = 2,$$

puis montrer que

$$\Big|\sum_{j<k} \Delta_{h_k}(f_j)\Big| \le \frac{\pi^2}{2}\Big(\sum_{j<k} b_j\Big)/b_k \quad \text{et} \quad \Big|\sum_{j>k} \Delta_{h_k}(f_j)\Big| \le 2 b_k \sum_{j>k} 1/b_j.$$

Conclure que f n'est pas dérivable au point x. Après cet échauffement, montrer que

$$x \to \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi 4^k x}$$

est continue et nulle part dérivable.
Indication : prendre $h_k = 4^{-k}$ et refaire les calculs précédents avec soin ; noter que $\pi^2 < 10$ et $\Delta_{h_k}(f_j) = 0$ quand $j > k$.