Exercice 1.
a. On considère une fonction borélienne positive φ sur $[0,\infty)\times[0,1]$ et un nombre réel p tel que $1 \le p < +\infty$. Montrer le cas suivant de *l'inégalité intégrale de Minkowski*, dont on aura besoin plus loin,

$$\Bigl(\int_0^{+\infty}\Bigl(\int_0^1 \varphi(x,y)\,\mathrm{d}y\Bigr)^p \mathrm{d}x\Bigr)^{1/p} \le \Bigl(\int_0^1 \Bigl(\int_0^{+\infty} \varphi(x,y)^p\,\mathrm{d}x\Bigr)^{1/p} \mathrm{d}y.$$

b. Montrer l'inégalité suivante, dans le cas $1 < p \le +\infty$ (une *inégalité de Hardy*)

$$\Bigl(\int_0^{+\infty}\Bigl(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\Bigr)^p \mathrm{d}x\Bigr)^{1/p} \le \frac{p}{p-1}\,\|f\|_{\mathrm{L}^p(0,\infty)}.$$

c. Montrer que l'application linéaire T_p qui associe à chaque $f\in \mathrm{L}^p(0,\infty)$ la fonction F définie sur $(0,\infty)$ par $\mathrm{F}(x) = x^{-1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue de L^p dans L^p et que

$$\|\mathrm{T}_p\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^p)} = \frac{p}{p-1}.$$

Indication : quand $\varepsilon > 0$ tend vers 0, comparer les normes des fonctions f_ε et $\mathrm{T}f_\varepsilon$, où on a posé $f_\varepsilon(x) = x^{-1/p}$ quand $\varepsilon < x < 1$ et $f_\varepsilon(x) = 0$ sinon ; on minorera la norme de la fonction $\mathrm{T}f_\varepsilon$ en ne regardant que l'intervalle $[\varepsilon, 1]$.

Exercice 2. On considère une fonction F_0 sur $\mathbb{R}$, lipschitzienne de constante C et à support contenu dans un intervalle fermé borné $[a,b]$; on introduit d'autre part une suite $u_1, u_2, \ldots$ de réels > 0 telle que $\sum_n u_n < +\infty$. Pour tout entier $n \ge 1$, on pose

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \mathrm{F}_n(x) = \frac{1}{u_n}\int_{x-u_n}^x \mathrm{F}_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. Montrer que F_n est lipschitzienne de constante C, et que son support est contenu dans l'intervalle $[a, b+u_1+\cdots+u_n]$. Montrer que F_n est de classe C^n sur $\mathbb{R}$. Vérifier que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{F}_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{F}_0(t)\,\mathrm{d}t.$$

b. Montrer que $|\mathrm{F}_n(x) - \mathrm{F}_{n-1}(x)| \le \mathrm{C}u_n$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ (cette inégalité n'est pas optimale mais nous suffira).
c. Montrer que F_n converge uniformément vers une fonction F de classe C^∞ à support compact. Vérifier que l'intégrale de F est égale à celle de F_0 et que le support de F est contenu dans l'intervalle $[a, b+\sum_{n=1}^{+\infty} u_n]$.

Exercice 3. Soit $(\mathrm{U}_n)_{n\ge1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$; montrer que la loi de la variable aléatoire

$$\mathrm{U} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}\mathrm{U}_n$$

admet une densité de classe C^∞ à support compact.
Indication : on pourra s'intéresser à la fonction caractéristique de la variable aléatoire U (transformée de Fourier de la loi de U).

Exercice 4. Calculer
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$
à partir du logarithme complexe.

Exercice 5. *Dans cet exercice, on ne suppose pas connue la théorie des séries de Fourier.*
a. Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ est nulle en dehors de $[-\pi, \pi]$, montrer que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ se prolonge en une fonction entière sur $\mathbb{C}$, qui admet la majoration
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |\widehat{f}(z)| \leq \|f\|_1 \, \mathrm{e}^{\pi |\operatorname{Im} z|}\,.$$
Montrer que la dérivée de $\widehat{f}(z)$ est bornée dans toute bande de la forme $|\operatorname{Im} z| \leq c$.
b. On suppose maintenant que
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i} nt} \, \mathrm{d}t = 0$$
pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe une constante K telle que
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |\widehat{f}(z)| \leq \mathrm{K} \, |\sin(\pi z)|\,;$$
en déduire que $\widehat{f}$ est un multiple de $x \to \sin(\pi x)$, puis que f est nulle.

Exercice 6. *Dans cet exercice, on ne suppose pas connue la théorie des séries de Fourier ; au contraire, il s'agit de proposer une preuve un peu différente pour la densité des polynômes trigonométriques. L'étudiant attentif pourra y voir une variante d'une démonstration courante du théorème de Dirichlet (qui lui aussi, implique la densité des polynômes trigonométriques).*
a. On désigne par X l'espace vectoriel des fonctions 2π-périodiques de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes. Montrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathrm{X}$, la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\varphi)$ converge absolument ; on peut donc poser
$$\ell(\varphi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\varphi)\,;$$
vérifier que ℓ est linéaire sur X.
b. Si $\psi \in \mathrm{X}$ et si on définit φ par $\varphi(x) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i} x} - 1) \psi(x)$, montrer que $\ell(\varphi) = 0$.
c. Si φ est 2π-périodique de classe C^3, montrer que la fonction ψ définie pour $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ par
$$\varphi(x) = \varphi(0) + (\mathrm{e}^{\mathrm{i} x} - 1) \psi(x)$$
se prolonge en un élément $\psi \in \mathrm{X}$.
d. Si φ est 2π-périodique de classe C^3, montrer que
$$\varphi(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\varphi), \quad \text{puis} \quad \varphi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\varphi) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} nx}$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Soit K un espace topologique compact (qui n'est pas supposé métrisable) ; montrer que pour tout $x \in \mathrm{K}$ et tout fermé F de K tel que $x \notin \mathrm{F}$, on peut trouver des ouverts V et W tels que

$$x \in \mathrm{V}, \quad \mathrm{F} \subset \mathrm{W}, \quad \mathrm{V} \cap \mathrm{W} = \emptyset.$$

Montrer que pour tout voisinage U du point x dans K, il existe un ouvert V de K tel que $x \in \mathrm{V} \subset \overline{\mathrm{V}} \subset \mathrm{U}$.

Si F_0 et F_1 sont deux fermés disjoints dans K, montrer qu'on peut trouver deux ouverts V_0 et V_1 tels que $\mathrm{F}_0 \subset \mathrm{V}_0$, $\mathrm{F}_1 \subset \mathrm{V}_1$ et $\mathrm{V}_0 \cap \mathrm{V}_1 = \emptyset$.

Exercice 8. Soit f une fonction de norme un dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$; montrer que l'ensemble des translatées $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de la fonction f n'est pas compact dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$.
Indication : évaluer la distance $\|f - f_t\|_p$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Exercice 9. On considère l'espace de Hilbert réel $\mathrm{H} = \ell_2(\mathbb{N})$. On se donne une suite de nombres $c_n > 0$ telle que $\sum c_n^2 < +\infty$, et on considère

$$\mathrm{C} = \{x = (x_n)_{n \geq 0} \in \mathrm{H} : \forall n \geq 0,\ |x_n| \leq c_n\}.$$

Montrer que C est compact. Montrer que l'application φ de $\mathrm{K} = [-1, 1]^{\mathbb{N}}$ (muni de la topologie produit) dans H, définie par

$$\forall y = (y_n) \in \mathrm{K}, \quad \varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n c_n \mathbf{e}_n$$

est un homéomorphisme de K sur C (on a noté $(\mathbf{e}_n)_{n \geq 0}$ la base hilbertienne canonique de l'espace H).

On appelle souvent cet ensemble, sous une forme ou l'autre, le *cube de Hilbert*.

Exercice 10. Montrer que tout espace métrique complet non vide et sans point isolé contient un sous-ensemble homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor.

Exercice 11 : *inégalité maximale sur* $\mathbb{R}$*, et un théorème de dérivation de Lebesgue.*
a. On suppose qu'un compact $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}$ est couvert par une famille d'intervalles ouverts $(\mathrm{I}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$; montrer qu'il existe une sous-famille finie $(\mathrm{I}_\beta)_{\beta \in \mathrm{B}}$ telle que chaque point de K appartienne à un ou à deux intervalles I_β, $\beta \in \mathrm{B}$.

Pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ on introduit la (grande) *fonction maximale* f^*, définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^*(x) = \sup_{\mathrm{J}\,:\, x \in \mathrm{J}} \frac{1}{|\mathrm{J}|} \int_{\mathrm{J}} |f(y)| \,\mathrm{d}y,$$

où J varie dans la famille des intervalles bornés contenant x.
b. Calculer f^* pour $f = \mathbf{1}_{(-1,1)}$. A-t-on toujours $f^* \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ quand $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$?
c. Soient $t > 0$ et K un compact contenu dans l'ensemble ouvert $\{f^* > t\}$; montrer que

$$t|\mathrm{K}| \leq 2 \int_{\{f^* > t\}} |f|.$$

Indication : pour tout point $x \in \mathrm{K}$, il existe un intervalle ouvert J contenant x tel que $\int_{\mathrm{J}} |f| > t|\mathrm{J}|$ et tel que $\mathrm{J} \subset \{f^* > t\}$.

En déduire que pour tout $t > 0$, on a

$$\Big|\{x \in \mathbb{R} : f^*(x) > t\}\Big| \le \frac{2}{t} \int_{\{f^*>t\}} |f(y)| \,\mathrm{d}y \le \frac{2\|f\|_1}{t}.$$

d. Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$; montrer que

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(y) \,\mathrm{d}x$$

admet $f(x)$ pour dérivée, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.
Indication : approcher f dans L^1 par g continue, appliquer à $(f-g)^*$ l'inégalité de la question *c.*

e. Soit A un ensemble borélien de $\mathbb{R}$; montrer que presque tout point x de A est un *point de densité de* A, c'est-à-dire que

$$\lim_{h \to 0} \big|\mathrm{A} \cap [x-h, x+h]\big|/(2h) = 1.$$

Exercice 12. Soit (K, d) un espace métrique compact ; montrer que l'équicontinuité d'un ensemble de fonctions $\mathrm{A} \subset \mathrm{C}(\mathrm{K})$ implique l'équicontinuité uniforme de A (comme on montre qu'une fonction continue sur le compact K est uniformément continue).

Indication : pour tout $x \in \mathrm{K}$ l'équicontinuité de A donne un ouvert U_x de K, contenant x et tel que $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ pour toute $f \in \mathrm{A}$ et tout $y \in \mathrm{U}_x$; les $(\mathrm{U}_x)_{x \in \mathrm{K}}$ forment un recouvrement ouvert du compact K...

Exercice 13 : *contre-exemple à l'extraction de sous-suites convergentes dans un compact général.* Désignons par K le disque unité fermé de $\mathbb{C}$; montrer que la suite (f_n) dans le compact $\mathrm{X} = \mathrm{K}^{[0,2\pi]}$ définie par $f_n(t) = \mathrm{e}^{int}$ n'admet aucune sous-suite simplement convergente (l'espace X est muni de la topologie produit, c'est-à-dire la topologie de la convergence simple sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, pour laquelle il est compact par Tykhonov).

Indication : si une sous-suite (f_{n_k}) convergeait simplement vers une fonction limite f, on pourrait invoquer le théorème de convergence dominée.

Exercice 14. On suppose que k est une fonction réelle ou complexe, continue sur le triangle fermé $\{(x,t) : 0 \le t \le x \le 1\}$. On définit un opérateur linéaire continu T de $\mathrm{L}^1([0,1])$ dans $\mathrm{C}([0,1])$ en posant pour toute $f \in \mathrm{L}^1([0,1])$

$$(\mathrm{T}f)(x) = \int_0^x k(x,t) f(t) \,\mathrm{d}t.$$

Pour tout q tel que $1 \le q \le +\infty$ on désigne par $\mathrm{T}_q \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^q([0,1]), \mathrm{C}([0,1]))$ la restriction de T à $\mathrm{L}^q([0,1])$; montrer que T_q est compact de $\mathrm{L}^q([0,1])$ dans $\mathrm{C}([0,1])$ pour tout $q > 1$, mais que T_1 n'est pas compact en général.

Exercice 15. On définit un opérateur linéaire P sur $\mathrm{L}_2(0,1)$ en posant pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_2(0,1)$

$$\forall s \in (0,1), \quad (\mathrm{P}f)(s) = \int_0^s f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. Vérifier que P est borné ; montrer que P est compact ; montrer que P est injectif.

b. Déterminer l'adjoint P^*. Diagonaliser $\mathrm{P}^*\mathrm{P}$.

Indication : si les fonctions f, g sont continues, les fonctions $\mathrm{P}f$ et P^*g sont dérivables ; montrer que les fonctions propres de $\mathrm{P}^*\mathrm{P}$ vérifient une équation différentielle, qu'on résoudra en tenant compte des diverses valeurs aux bornes.

Exercice 16. Montrer que l'ensemble K de fonctions réelles sur $[0, \mathrm{T}]$ défini par

$$\mathrm{K} = \{g : g(0) = 0\,; \quad \forall x, y \in [0, \mathrm{T}], \quad |g(y) - g(x)| \le |y - x|\}$$

est un convexe compact de l'espace $\mathrm{C}([0,\mathrm{T}])$ des fonctions réelles continues sur l'intervalle fermé borné $[0,\mathrm{T}]$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée par 1 ; montrer que l'application $\mathrm{S} : g \in \mathrm{K} \to \mathrm{S}g$, où la fonction $\mathrm{S}g$ est définie par

$$\forall x \in [0, \mathrm{T}], \quad (\mathrm{S}g)(x) = \int_0^x f(g(s))\,ds,$$

est continue de K dans K. Déduire du théorème de Schauder qu'il existe une fonction g de classe C^1 sur $[0,\mathrm{T}]$ telle que $g'(x) = f(g(x))$ pour tout $x \in [0, \mathrm{T}]$.

Exercice 17. On rappelle que la fonction de Bessel J_0 peut être exprimée par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{J}_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

La fonction J_0 admet une infinité de zéros réels > 0 qui interviendront dans cet exercice, et qu'on notera $z_1 < \ldots < z_k < \ldots$.

a. Vérifier que $x\,\mathrm{J}_0''(x) + \mathrm{J}_0'(x) + x\,\mathrm{J}_0(x) = 0$ pour tout x ; chercher une autre solution $x \to y(x)$ sur $]0, z_1[$ de l'équation différentielle (de Bessel) $x\,y'' + y' + x\,y = 0$, en l'exprimant sous la forme $y(x) = u(x)\mathrm{J}_0(x)$; vérifier que $x\mathrm{J}_0(x)^2u'(x)$ est constante et en déduire que les solutions sur $]0, z_1[$ qui restent bornées au voisinage de 0 sont proportionnelles à J_0. Si y vérifie l'équation de Bessel et si μ est un réel > 0, quelle est l'équation vérifiée par la fonction z définie par $z(x) = y(\mu x)$?

b. On désigne par ν la mesure à densité $\mathrm{d}\nu(t) = t\,\mathrm{d}t$ sur l'intervalle $[0,1]$, et on définit un opérateur linéaire T sur l'espace réel $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2([0,1], \nu)$ en posant pour toute $f \in \mathrm{H}$

$$\forall s \in]0,1], \quad (\mathrm{T}f)(s) = \ln(s) \int_0^s f(t)\,t\,\mathrm{d}t + \int_s^1 \ln(t) f(t)\,t\,\mathrm{d}t.$$

Vérifier que T est borné, hermitien, compact ; montrer que $\mathrm{T}f$ se prolonge en fonction continue sur $[0,1]$.

c. Dans le cas où f est continue sur $[0,1]$, montrer que $\mathrm{F} = \mathrm{T}f$ est deux fois dérivable sur l'ouvert $]0,1[$ et y vérifie $(x\mathrm{F}'(x))' = xf(x)$. En déduire que toute fonction φ de classe C^2 à support dans l'ouvert $]0,1[$ est l'image par T de $f = (x\varphi'(x))'/x$, et que T est injectif ; montrer que $\int_0^1 (\mathrm{T}f)(x) f(x)\,x\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 (\mathrm{F}'(x))^2\,x\,\mathrm{d}x \le 0$.

d. Diagonaliser T en montrant que les fonctions propres f doivent vérifier une certaine équation différentielle, avec les conditions au bord $f(1) = 0$ et f bornée au voisinage du point 0 (on devra considérer l'équation satisfaite par $x \to f(x/\mu)$, $\mu > 0$ bien choisi).

Exercice 18. Soit n un entier ≥ 1 fixé ; on rappelle que l'équation de Bessel d'ordre n est

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0,$$

et qu'elle admet une solution J_n qui peut être exprimée par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{J}_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{n+2k}}{2^{2k} k!(k+n)!}.$$

La fonction J_n est nulle en 0, et elle admet une infinité de zéros réels > 0 qui interviendront dans cet exercice, et qu'on notera $z_{n,1} < \ldots < z_{n,k} < \ldots$.

a. Chercher une autre solution $x \to y(x)$ sur $]0, z_{n,1}[$ de l'équation différentielle de Bessel d'ordre n, en l'exprimant sous la forme $y(x) = u(x)\mathrm{J}_n(x)$; vérifier que $x\mathrm{J}_n(x)^2u'(x)$ est constante et en déduire que les solutions sur $]0, z_{n,1}[$ qui restent bornées au voisinage de 0 sont proportionnelles à J_n. Si y vérifie l'équation de Bessel d'ordre n et si μ est un réel > 0, quelle est l'équation vérifiée par la fonction z définie par $z(x) = y(\mu x)$?

b. On désigne par ν la mesure à densité $\mathrm{d}\nu(t) = t\,\mathrm{d}t$ sur l'intervalle $[0, 1]$. On pose

$$\forall x \in]0, 1], \quad u_n(x) = \frac{x^n - x^{-n}}{2n},$$

et on définit un opérateur linéaire T sur l'espace réel $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2([0, 1], \nu)$ en posant pour toute $f \in \mathrm{H}$

$$\forall s \in]0, 1], \quad (\mathrm{T}f)(s) = u_n(s) \int_0^s t^n f(t)\, t\,\mathrm{d}t + s^n \int_s^1 u_n(t) f(t)\, t\,\mathrm{d}t.$$

Vérifier que T est borné, hermitien, compact ; montrer que $\mathrm{T}f$ se prolonge en fonction continue sur $[0, 1]$, telle que $(\mathrm{T}f)(x) = \mathrm{O}(x)$ quand $x \to 0+$.

c. Dans le cas où f est continue sur $[0, 1]$, montrer que $\mathrm{F} = \mathrm{T}f$ est deux fois dérivable sur l'ouvert $]0, 1[$ et y vérifie $(x\mathrm{F}'(x))' = n^2\mathrm{F}(x)/x + xf(x)$. En déduire que toute fonction φ de classe C^2 à support dans l'ouvert $]0, 1[$ est l'image par T de la fonction f définie par $f(x) = (x\varphi'(x))'/x - n^2\varphi(x)/x^2$, et que T est injectif ; montrer que

$$\langle \mathrm{T}f, f\rangle_{\mathrm{L}^2(\nu)} = -\int_0^1 (\mathrm{F}'(x))^2\, x\,\mathrm{d}x - n^2 \int_0^1 (\mathrm{F}(x)/x)^2\, x\,\mathrm{d}x \leq 0.$$

d. Diagonaliser T en montrant que les fonctions propres f doivent vérifier une certaine équation différentielle, avec les conditions au bord $f(1) = 0$ et f bornée au voisinage du point 0 (on devra considérer l'équation satisfaite par $x \to f(x/\mu)$, $\mu > 0$ bien choisi).

Exercice 19 : théorème de Mercer. Soient X un espace métrique compact et μ une mesure finie sur la tribu borélienne de X, telle que $\mu(\mathrm{V}) > 0$ pour tout ouvert V non vide ; on considère un noyau hermitien k sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$, c'est-à-dire que

$$\forall x, y \in \mathrm{X}, \quad k(x, y) = \overline{k(y, x)},$$

et on suppose que la fonction $(x, y) \to k(x, y)$ est *continue* sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$. Montrer que l'opérateur T_k défini sur $\mathrm{L}^2(\mathrm{X}, \mu)$ par

$$(\mathrm{T}_k f)(x) = \int_\mathrm{X} k(x, y) f(y)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

est hermitien et compact sur $\mathrm{L}^2(\mathrm{X},\mu)$.

On suppose de plus que l'opérateur T_k est positif, c'est-à-dire

$$\forall f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{X},\mu), \quad \langle \mathrm{T}_k f, f\rangle \geq 0.$$

On sait que $\mathrm{L}^2(\mathrm{X},\mu)$ admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T_k. Montrer que plus précisément, il existe une suite de réels $\lambda_n \geq 0$ et des fonctions continues φ_n, de norme un dans L^2, telles que

$$\forall x,y \in \mathrm{X}, \quad k(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \,\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(y)},$$

où la série de fonctions continues converge absolument et uniformément sur $\mathrm{X}\times\mathrm{X}$ (théorème de Mercer).

Indications : on notera que les fonctions propres de T_k pour les valeurs propres > 0 sont des fonctions continues ; on montrera que si h est un noyau hermitien continu tel que T_h soit positif, il en résulte que $h(x,x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathrm{X}$ et

$$\forall x,y \in \mathrm{X}, \quad |h(x,y)|^2 \leq h(x,x)\,h(y,y)\,;$$

on appliquera ceci à $\mathrm{T}_h = \mathrm{T}_k - \mathrm{S}_n$, où (S_n) est une suite convenable d'opérateurs de rang fini correspondant à des noyaux continus ; on utilisera Dini sur la diagonale de $\mathrm{X}\times\mathrm{X}$.

Exercice 20. Packing et recouvrement ; on considère un espace métrique (X,d) et une partie $\mathrm{K} \subset \mathrm{X}$ compacte. Pour tout $\varepsilon > 0$ désignons par $\mathrm{N}_\mathrm{P}(\mathrm{K},\varepsilon)$ le max du nombre N de points $x_1,\ldots,x_\mathrm{N}$ de K qui sont à distances $\geq \varepsilon$, c'est-à-dire $d(x_i,x_j) \geq \varepsilon$ pour tous $i \neq j$. Notons $\mathrm{N}_\mathrm{R}(\mathrm{K},\varepsilon)$ le min du nombre M tel que K puisse être recouvert par M boules ouvertes $\mathrm{B}(y_i,\varepsilon)$, $i = 1,\ldots,\mathrm{M}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{N}_\mathrm{R}(\mathrm{K},\varepsilon) \leq \mathrm{N}_\mathrm{P}(\mathrm{K},\varepsilon) \leq \mathrm{N}_\mathrm{R}(\mathrm{K},\varepsilon/2).$$

Indication : dans un sens, si $\mathrm{N} = \mathrm{N}_\mathrm{P}(\mathrm{K},\varepsilon)$ et si les points $x_1,\ldots,x_\mathrm{N}$ de K vérifient $d(x_i,x_j) \geq \varepsilon$ pour $i \neq j$, il est impossible d'ajouter un point supplémentaire vérifiant la propriété d'écartement, par la définition de N qui est maximal ; exploiter cette information. Pour l'autre inégalité, si on pouvait recouvrir K par M boules ouvertes de rayon $\varepsilon/2$ avec $\mathrm{M} < \mathrm{N}$, l'une de ces boules devrait contenir deux points x_i et x_j.

On suppose maintenant que $\mathrm{X} = \mathbb{R}^p$ est muni d'une norme, on prend pour d la distance déduite de la norme, et pour K la boule unité B (fermée) de cet espace normé. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{\varepsilon^p} \leq \mathrm{N}_\mathrm{R}(\mathrm{B},\varepsilon)\,; \quad \mathrm{N}_\mathrm{P}(\mathrm{B},2\varepsilon) \leq \frac{(1+\varepsilon)^p}{\varepsilon^p}\,\cdot$$

Indications : si $\mathrm{M} = \mathrm{N}_\mathrm{R}(\mathrm{B},\varepsilon)$, la boule unité B est couverte par M boules B_i de rayon ε. Utiliser un argument de volumes. Pour l'autre relation, soit N le cardinal d'une famille maximale de points (x_i) de B, dont les distances mutuelles sont $\geq 2\,\varepsilon$; alors les N boules $\mathrm{B}_i = \mathrm{B}(x_i,\varepsilon)$ sont disjointes et contenues dans la boule $\mathrm{B}(0,1+\varepsilon)$; raisonner à nouveau avec des volumes.

Exercice 21.

a. Dans un espace de Banach E on considère une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de vecteurs telle que $\lim_n x_n = 0_{\mathrm{E}}$. On désigne par F l'adhérence de l'enveloppe convexe de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$. Démontrer que F est compact.

b. On suppose maintenant que K est un compact de E, et on veut montrer qu'il existe un ensemble F, construit comme dans la question précédente, tel que $\mathrm{K} \subset \mathrm{F}$.

Indication. On montrera d'abord le fait suivant : supposons que $\mathrm{K} \subset \mathrm{B}(0_{\mathrm{E}}, 1)$; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fini $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}(0_{\mathrm{E}}, (1-\varepsilon)^{-1})$ et un compact $\mathrm{K}_1 \subset \mathrm{B}(0_{\mathrm{E}}, \varepsilon)$ tels que K soit contenu dans l'enveloppe convexe de la réunion de A et de K_1. On pourra prendre un ensemble fini $\mathrm{C} \subset \mathrm{K}$ tel que la réunion des boules de rayon $\alpha < \varepsilon^2$ centrées aux points de C recouvre K, puis poser $\mathrm{A} = (1-\varepsilon)^{-1}\mathrm{C}$ et définir K_1 comme un multiple convenable de la réunion des translatés

$$\mathrm{K}_2 = \bigcup_{c\in \mathrm{C}} \Big(\big(\mathrm{K} \cap \overline{\mathrm{B}(c, \alpha)}\big) - c \Big).$$

Exercice 22. On dit qu'un espace topologique X est *polonais* s'il est séparable et s'il existe une distance d sur X qui définit la même topologie et qui rend X complet.

a. On considère l'ensemble $\mathbb{N}$ que l'on munit de la topologie discrète ; vérifier que l'espace topologique produit $\mathrm{P} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est polonais.

b. Soit X un espace polonais non vide ; montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite de fermés non vides $(\mathrm{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de diamètres $\leq \varepsilon$ qui recouvre X.

c. On commence l'opération de la question précédente avec $\varepsilon = 1/2$, puis, pour chaque $n \geq 0$, on la recommence avec $\varepsilon = 1/4$ pour l'espace polonais F_n, que l'on recouvre ainsi par des fermés $\mathrm{F}_{n,p}$, $p \in \mathbb{N}$. Montrer en poursuivant ce processus qu'il existe une application continue surjective de P sur X. Pourrait-on rendre cette application bijective ?

Exercice 23. Dans l'espace X de toutes les fonctions f de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, muni de la topologie de la convergence simple (l'espace X est donc compact par Tykhonov), on considère le sous-ensemble K formé des fonctions f croissantes (au sens large).

a. Montrer que K est compact (pour la topologie induite).

b. Montrer que le sous-ensemble D de K formé des fonctions f continues à droite, à valeurs rationnelles et en escalier, avec des sauts (éventuels) situés en des abscisses rationnelles, est un ensemble dénombrable. Montrer que D est dense dans K.

c. On considère maintenant l'espace de Banach C(K). Pour chaque $t \in [0, 1]$, on définit une fonction $\varphi_t \in \mathrm{C(K)}$ en posant $\varphi_t(f) = f(t)$ pour toute $f \in \mathrm{K}$. Calculer $\|\varphi_t - \varphi_s\|_{\mathrm{C(K)}}$ lorsque $s \neq t$.

En déduire que K est un compact séparable qui n'est pas métrisable.