Exercice 1. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite bornée de nombres réels ; on rappelle que

$$\limsup_n x_n = \lim_m \bigl(\sup_{n\geqslant m} x_n\bigr).$$

Montrer que $\limsup_n x_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de la suite (x_n) (le nombre réel y est *valeur d'adhérence* de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout m entier, il existe $n \geq m$ tel que $|y - x_n| < \varepsilon$).

Exercice 2. Si $(u_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est une famille d'éléments de $[0, +\infty]$, la notation $\sum_{i\in\mathrm{I}} u_i$ désigne la borne supérieure des sommes finies $\sum_{i\in\mathrm{J}} u_i$, pour J fini contenu dans I ; cette borne supérieure est un élément de $[0, +\infty]$, valeur $+\infty$ admise.

a. Si $(\mathrm{I}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ est une partition de I, montrer que

$$\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \Bigl(\sum_{i\in\mathrm{I}_\alpha} u_i\Bigr) = \sum_{i\in\mathrm{I}} u_i.$$

b. Si I est dénombrable et si $(i_n)_{n\geqslant 0}$ est une énumération de I, montrer que

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{i_n}.$$

c. Si la somme $\sum_{i\in\mathrm{I}} u_i$ n'est pas égale à $+\infty$, montrer que le sous-ensemble I_0 de I formé des indices i tels que $u_i > 0$ est fini ou dénombrable.

Exercice 3. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts (qu'on peut même supposer deux à deux disjoints).

Exercice 4. On dit qu'un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ est *discret* dans $\mathbb{R}$ si pour tout réel y, il existe un ouvert V de $\mathbb{R}$ contenant y et qui contient au plus un point de D. Montrer que D est fermé et dénombrable.

Exercice 5. Montrer que pour toute suite croissante de mesures positives (μ_n) sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$, la limite $\mathrm{A} \in \mathcal{A} \to \mu(\mathrm{A}) = \lim_n \mu_n(\mathrm{A})$ est une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Montrer que pour toute suite de mesures positives (ν_k) sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$, la formule

$$\mathrm{A} \in \mathcal{A} \to \nu(\mathrm{A}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \nu_k(\mathrm{A})$$

définit une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Exercice 6. On rappelle que la lim sup d'une suite de sous-ensembles (A_n) d'un ensemble Ω est définie par

$$\limsup_n \mathrm{A}_n = \bigcap_n \bigcup_{m\geqslant n} \mathrm{A}_m \subset \Omega.$$

Montrer qu'un ensemble $\mathrm{X} \subset \mathbb{R}$ est négligeable (pour la mesure de Lebesgue λ) si et seulement s'il existe une suite d'intervalles (I_n) telle que

$$\sum |\mathrm{I}_n| < +\infty \quad \text{et} \quad \mathrm{X} \subset \limsup_n \mathrm{I}_n$$

(on a noté $|\mathrm{I}|$ la longueur d'un intervalle I ; on rappelle qu'un sous-ensemble X de $\mathbb{R}$ est λ-négligeable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert V de $\mathbb{R}$ contenant X et tel que $\lambda(\mathrm{V}) < \varepsilon$; on pourra comparer le résultat de cet exercice au lemme de Borel-Cantelli).

Exercice 7. Si f est une fonction mesurable ≥ 0, montrer que $\int f \,\mathrm{d}\mu = 0$ si et seulement si $\mu(\{f > 0\}) = 0$.

Montrer que si $\int f \,\mathrm{d}\mu < \infty$, alors $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$.

Exercice 8. Soit f une fonction mesurable sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (muni de sa tribu borélienne) ; on suppose que f est intégrable par rapport à une mesure positive μ sur (Ω, μ). Si on a $\int_{\mathrm{A}} f \,\mathrm{d}\mu \geq 0$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, montrer que f est ≥ 0 μ-presque partout.

Exercice 9. On suppose que μ est une mesure ≥ 0 sur un espace mesurable $(\mathrm{X}, \mathcal{A})$ et f une fonction $\mathcal{A}$-mesurable ≥ 0 sur X ; montrer que la formule

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \nu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} f \,\mathrm{d}\mu = \int \mathbf{1}_{\mathrm{A}} f \,\mathrm{d}\mu$$

définit une mesure positive ν sur $(\mathrm{X}, \mathcal{A})$.

Exercice 10. Calculer

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} \,\mathrm{d}x.$$

Exercice 11. Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt} \,\mathrm{d}x.$$

a. Montrer que $\widehat{f}$ est bornée, continue, et tend vers 0 à l'infini.

b. Montrer que si $\int_{\mathbb{R}} |x|^k |f(x)| \,dx < +\infty$, alors $\widehat{f}$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ (k est un entier ≥ 1).

c. Si μ est une mesure ≥ 0 finie sur $\mathbb{R}$, on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt} \,\mathrm{d}\mu(x).$$

Généraliser les résultats de continuité et dérivabilité.

Exercice 12. Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, positive, paire avec $\widehat{f}$ de classe C^2, alors

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) \,\mathrm{d}x < +\infty$$

(c'est une sorte de réciproque de la question *b.* de l'exercice précédent, pour $k = 2$).

Exercice 13. Montrer que

$$\int_{-2}^{2} \Bigl(1 - \frac{x^2}{4}\Bigr)^n \,\mathrm{d}x$$

tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Montrer que pour tout ε tel que $0 < \varepsilon \leq 2$ on a

$$\lim_n \sqrt{n} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Bigl(1 - \frac{x^2}{4}\Bigr)^n \,\mathrm{d}x = 2\sqrt{\pi}.$$

Exercice 14. On suppose que f est une fonction réelle dérivable en tout point de $\mathbb{R}$, et que sa dérivée f' est bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tous $a < b$, on a

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a).$$

Exercice 15. Si f est une fonction Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$, montrer que la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-|x-t|}\, f(t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16. Si f est une fonction continue et Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$, montrer que la fonction F définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(x) = \int_0^1 f(x-t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17. Si (f_n) est une suite de fonctions réelles $\mathcal{A}$-mesurables définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$, montrer que l'ensemble A des points $\omega \in \Omega$ où la limite $\lim_n f_n(\omega)$ existe est un ensemble de la tribu $\mathcal{A}$.

Exercice 18. Mesurabilité à valeurs dans un espace métrique séparable X : soit f une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans X muni de sa tribu borélienne ; montrer que f est limite simple d'une suite (f_n) d'applications mesurables ne prenant qu'un nombre fini de valeurs dans X.
Indication. Si (x_k) est une suite dense dans X, on pose $f_n(\omega)$ égal au x_k le plus proche de $f(\omega)$ parmi $x_0, \ldots, x_n$, avec choix du plus petit indice k pour départager en cas d'égalité. Montrer que f_n est mesurable et converge simplement vers f.

Si X est un espace vectoriel normé séparable, montrer qu'on peut ajouter la condition $\|f_n(\omega)\| \le \|f(\omega)\|$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Exercice 19. On suppose que μ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, et on suppose que pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(\mathrm{A}) > 0$, il existe $\mathrm{B} \in \mathcal{A}$, $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ et $0 < \mu(\mathrm{B}) < \mu(\mathrm{A})$. Montrer que pour tout $c \in [0, 1]$, il existe un ensemble $\mathrm{A}_c \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(\mathrm{A}_c) = c$.

Exercice 20.

Si $\int |g_k|\,\mathrm{d}\mu \le 2^{-k}$ pour tout entier $k \ge 0$, montrer que la suite $(g_k(\omega))$ tend vers 0 pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$.

Si $(f_n) \subset \mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ tend vers f en norme L^p, trouver une sous-suite (f_{n_j}) qui tend vers f μ-presque partout.

Exercice 21. Montrer que pour tout borélien A de $[0, 1]$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{A}$ tel que $\lambda(\mathrm{A} \setminus \mathrm{K}) < \varepsilon$.
Indication. Montrer que la famille des sous-ensembles B de $[0, 1]$ qui ont la propriété suivante : *pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un compact* K_ε *et un ouvert* V_ε *de* $[0, 1]$ *tels que* $\mathrm{K}_\varepsilon \subset \mathrm{B} \subset \mathrm{V}_\varepsilon$ *et* $\lambda(\mathrm{V}_\varepsilon \setminus \mathrm{K}_\varepsilon) < \varepsilon$, est une tribu de parties de $[0, 1]$ qui contient les intervalles.

Exercice 22 : théorèmes d'Egorov et de Lusin. On suppose que μ est une mesure ≥ 0 finie sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

a. Si la suite (f_n) de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables tend simplement vers 0 sur Ω, trouver pour tout $k \geq 0$ un entier n_k tel que $\mu\{|f_{n_k}| > 2^{-k}\} \leq 2^{-k}$.

b. Montrer que pour tout entier k_0, la sous-suite $(f_{n_j})_j$ trouvée en a tend uniformément vers 0 sur l'ensemble

$$\mathrm{A}(k_0) = \bigcap_{k \geqslant k_0} \{|f_{n_k}| \leq 2^{-k}\}$$

et que cet ensemble $\mathrm{A}(k_0)$ a une mesure qui tend vers $\mu(\Omega)$ lorsque $k_0 \to +\infty$.

c. Théorème de Lusin. Montrer que pour toute fonction f borélienne sur $[0, 1]$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un compact $\mathrm{K}_\varepsilon \subset [0, 1]$ tel que $\lambda([0, 1] \setminus \mathrm{K}_\varepsilon) < \varepsilon$ et tel que la restriction de f à K_ε soit continue.

Exercice 23 : construction de la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.
Si I est un intervalle contenu dans $[0, 1]$, on note $\ell(\mathrm{I})$ sa longueur ; on dira qu'un ensemble $\mathrm{B} \subset [0, 1]$ est *simple* si c'est une réunion finie d'intervalles disjoints, et dans ce cas la mesure $\ell(\mathrm{B})$ de cet ensemble est la somme des longueurs de ces intervalles. Si X est un sous-ensemble de $[0, 1]$, la *mesure extérieure de* X, notée $\lambda^*(\mathrm{X})$, est la borne inférieure des nombres m tels qu'il existe une famille finie ou dénombrable d'intervalles ouverts $(\mathrm{I}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ telle que

$$\mathrm{X} \subset \bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathrm{I}_\alpha \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \ell(\mathrm{I}_\alpha) < m.$$

a. Montrer que $\lambda^*(\mathrm{B}) = \ell(\mathrm{B})$ quand B est simple ; pour montrer que $\ell(\mathrm{B}) \leq \lambda^*(\mathrm{B})$, on commencera par le cas où B est fermé, donc compact (penser à Borel-Lebesgue).

b. Montrer que

$$\lambda^*\Big(\bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathrm{X}_\alpha\Big) \leq \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \lambda^*(\mathrm{X}_\alpha)$$

pour toute famille finie ou dénombrable $(\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ de sous-ensembles de $[0, 1]$.

c. Si X, Y sont deux sous-ensembles de $[0, 1]$, on introduit leur *différence symétrique*

$$\mathrm{X} \triangle \mathrm{Y} = (\mathrm{X} \setminus \mathrm{Y}) \cup (\mathrm{Y} \setminus \mathrm{X})\,;$$

montrer que $\mathbf{1}_{\mathrm{X} \triangle \mathrm{Y}} = \big|\mathbf{1}_\mathrm{X} - \mathbf{1}_\mathrm{Y}\big|$; montrer que si Z est un troisième sous-ensemble de $[0, 1]$, on a

$$\mathrm{X} \triangle \mathrm{Z} \subset (\mathrm{X} \setminus \mathrm{Y}) \cup (\mathrm{Y} \setminus \mathrm{Z}) \quad \text{et} \quad \lambda^*(\mathrm{X} \triangle \mathrm{Z}) \leq \lambda^*(\mathrm{X} \setminus \mathrm{Y}) + \lambda^*(\mathrm{Y} \setminus \mathrm{Z}).$$

Montrer que $|\lambda^*(\mathrm{X}) - \lambda^*(\mathrm{Y})| \leq \lambda^*(\mathrm{X} \triangle \mathrm{Y})$.

On dira qu'une suite (B_n) d'ensembles simples contenus dans $[0, 1]$ *tend en mesure* vers un ensemble $\mathrm{X} \subset [0, 1]$ si la mesure extérieure de la différence symétrique $\mathrm{X} \triangle \mathrm{B}_n$ tend vers 0.

d. Montrer que dans ce cas, la suite $\ell(\mathrm{B}_n)$ tend vers une limite, et que cette limite ne dépend pas de la suite (B_n) particulière : on la notera $\lambda(\mathrm{X})$.

On désigne par $\mathcal{M}$ la collection $\mathcal{M}$ des sous-ensembles X de $[0, 1]$ qui sont limite en mesure d'une suite (B_n) d'ensembles simples.

e. Vérifier que $\mathcal{M}$ est stable par passage au complémentaire ; si (B_n) tend en mesure vers X et (C_n) vers Y, et si X et Y sont disjoints, montrer que $\ell(\mathrm{B}_n \cap \mathrm{C}_n)$ tend vers 0. Montrer que $\lambda^*(\mathrm{X}) = \lambda(\mathrm{X})$ quand $\mathrm{X} \in \mathcal{M}$.

En déduire que $\mathcal{M}$ est une tribu, et que λ est une mesure sur $\mathcal{M}$ qui prolonge ℓ.

Exercice 24. Soient k un nombre entier et $\alpha \in \mathbb{R}$ un nombre irrationnel ; déterminer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k j \alpha}.$$

On considère une fonction f continue et 1-périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(j\alpha) = \int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Généraliser au cas d'un couple (α, β) et d'une fonction g continue de deux variables telle que $g(x+1, y) = g(x, y+1) = g(x, y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 25. Démontrer le théorème dit *de Mertens* : si $\sum |a_n| < +\infty$ et si la série $\sum b_n$ est convergente (simplement), alors la *série produit* $\sum c_n$ dont le terme général est

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$$

est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Bigr)\Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\Bigr).$$

(*Indication.* Exprimer les sommes partielles de la série produit au moyen des a_j et des sommes partielles de la série $\sum b_n$; appliquer une version facile du théorème de convergence dominée, celle du cas de la mesure de comptage).

Montrer que le théorème ne subsiste pas si on suppose seulement que les deux séries sont simplement convergentes.

Exercice 26. On suppose donnée une fonction f sur $[0, 1]$ telle que $0 < f(x) \leq 1 - x$ pour tout $x \in [0, 1]$. Pour chaque $x \in [0, 1[$ on pose $x^+ = x + f(x)$. On a donc $x < x^+ \leq 1$ pour tout $x \in [0, 1[$. Montrer que l'intervalle semi-ouvert $[0, 1[$ est réunion d'une suite d'intervalles de la forme $[x_n, x_n^+[$, deux à deux disjoints (peut-être une suite finie).
Indication. Considérer l'ensemble E des y de $[0, 1]$ qui ont la propriété suivante : il existe un *unique* ensemble dénombrable A contenu dans $[0, y[$ tel que $[0, y[$ soit la réunion des $[x, x^+[$ pour x variant dans A. Raisonner sur la borne supérieure de cet ensemble E.

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ et soit $([x_n, y_n[)_{n\geqslant 0}$ un recouvrement de $[0, 1[$ en intervalles deux à deux disjoints, tels que $0 \leq x_n < y_n \leq 1$ et $f(y_n) - f(x_n) \geq u_n$ pour tout $n \geq 0$, où $\sum |u_n| < +\infty$. Montrer que $f(1) - f(0) \geq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On suppose que f continue sur $[0, 1]$ possède une dérivée à droite > 0, sauf peut-être aux points d'un ensemble dénombrable $\mathrm{D} = (d_n)_{n\geqslant 0} \subset [0, 1]$. Montrer qu'à tout $x \in [0, 1[$ on peut associer x^+, de façon que $x < x^+ \leq 1$, et que $f(x^+) > f(x)$ si $x \notin \mathrm{D}$ et $f(x^+) - f(x) > -\varepsilon 2^{-n}$ si $x = d_n$. En déduire que $f(1) \geq f(0)$.

On suppose que f continue sur $[0, 1]$ possède une dérivée à droite ≥ 0, sauf peut-être aux points d'un ensemble dénombrable $\mathrm{D} = (d_n)_{n\geqslant 0} \subset [0, 1]$. Montrer que f est croissante (au sens large) sur $[0, 1]$ (ce théorème a été énoncé par Dini, démontré pour la première fois en toute généralité par Ludwig Scheeffer vers 1885 ; l'idée de démonstration précédente figure dans le livre de Lebesgue de 1904, *Leçons sur la théorie de l'intégration et la recherche des fonctions primitives*).