Exercice 27. On désigne par α un paramètre réel, et pour chaque entier $n \geq 1$ on pose $u_n = (-1)^{[\sqrt{n}]}/n^\alpha$, où $[x]$ désigne la partie entière du réel x, c'est-à-dire l'entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leq x < k+1$. On se propose d'étudier la série numérique $\sum u_n$.

Pour chaque entier $k \geq 1$ on pose

$$\mathrm{S}_k = \sum_{k^2 \leqslant n < (k+1)^2} \frac{1}{n^\alpha}.$$

a. Vérifier que la série $\sum u_n$ converge lorsque $\alpha > 1$.

b. Vérifier que

$$\sum_{1 \leqslant n < (k+1)^2} u_n = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \, \mathrm{S}_j.$$

c. On suppose ici que $\alpha \leq 1/2$. Montrer que $\mathrm{S}_k \geq 1$; conclure dans ce cas.

d. On suppose maintenant que $1/2 < \alpha$. Montrer que

$$\frac{2}{(k+1)^{2\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^{2\alpha}} \leq \mathrm{S}_k \leq \frac{2}{k^{2\alpha-1}} + \frac{1}{k^{2\alpha}}.$$

En déduire la convergence de la série $\sum (-1)^k \, \mathrm{S}_k$. En plaçant un entier $n \geq 1$ quelconque entre deux carrés successifs k^2 et $(k+1)^2$, conclure l'étude des sommes partielles $\sum_{j=1}^n u_j$ dans ce cas.

Exercice 28. On suppose que f est une fonction réelle croissante sur $\mathbb{R}$, et dérivable en presque tout point de $\mathbb{R}$ (pour la mesure de Lebesgue). Montrer que f' est une fonction Lebesgue-mesurable (définie presque partout) ; montrer que pour tous $a < b$, on a

$$\int_a^b f'(t) \, \mathrm{d}t \leq f(b) - f(a).$$

Exercice 29. On considère une famille non nécessairement dénombrable de segments $[a_i, b_i]$, $i \in \mathrm{I}$ telle que $a_i < b_i$ pour chaque i. Montrer que la réunion

$$\bigcup_{i \in \mathrm{I}} [a_i, b_i]$$

est un ensemble borélien de $\mathbb{R}$.

Le résultat reste-t-il vrai pour une famille de carrés (fermés) dans $\mathbb{R}^2$?