Exercice 1. Soit φ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$; montrer que la fonction

$$x \to \frac{\varphi(x)}{x^2}$$

convenablement prolongée en 0, est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Si f est une fonction mesurable ≥ 0 et p un nombre réel ≥ 1, montrer que

$$\int_\Omega f^p \,\mathrm{d}\mu = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \mu(\{f > t\}) \,\mathrm{d}t.$$

Exercice 3. Si f et g sont intégrables sur $\mathbb{R}$ posons

$$\mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{G}(x) = \int_{-\infty}^x g(t) \,\mathrm{d}t.$$

Montrer que pour tous $a < b$ réels on a

$$\int_a^b \mathrm{F}(t) g(t) \,\mathrm{d}t = \big[\mathrm{F}\,\mathrm{G}\big]_a^b - \int_a^b f(t) \mathrm{G}(t) \,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4. On donne une fonction mesurable $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, intégrable sur tout intervalle borné, mais telle que

$$\int_{-\infty}^0 f(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t) \,\mathrm{d}t = +\infty.$$

On introduit la fonction F, définie sur $\mathbb{R}$ par la donnée de $\mathrm{F}(0)$ et par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) + \int_0^x f(t) \,\mathrm{d}t$$

(qu'il faut comprendre comme $\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) - \int_\mathbb{R} \mathbf{1}_{[x,0]}(t) f(t) \,\mathrm{d}t$ pour $x < 0$; quand la fonction f est continue, f est la dérivée de F, mais on ne suppose pas ici que f soit continue). Montrer que pour toute fonction borélienne $g \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, on a la formule « de changement de variable »

$$\int_\mathbb{R} g(y) \,\mathrm{d}y = \int_\mathbb{R} g(\mathrm{F}(x)) f(x) \,\mathrm{d}x.$$

Indication. On définira une mesure μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ par la formule

$$\forall \mathrm{B} \in \mathcal{B}_\mathbb{R}, \quad \mu(\mathrm{B}) = \int_\mathbb{R} \mathbf{1}_\mathrm{B}(\mathrm{F}(x)) f(x) \,\mathrm{d}x,$$

et on donnera une formule pour l'intégrale de g par rapport à μ ; de plus, pour tous $a < b$ on calculera $\mu([a, b])$.

Exercice 5. On munit $\mathbb{R}^d$ de la norme euclidienne $x \to \|x\|$, et on désigne par v_d le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$ pour la mesure de Lebesgue. Si f est une fonction borélienne ≥ 0 sur $[0, +\infty[$, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\|x\|)\,\mathrm{d}x = d\,v_d \int_0^{+\infty} f(r)r^{d-1}\,\mathrm{d}r.$$

Indication. On pourra « calculer » la mesure image de la mesure de Lebesgue par l'application $x \to \|x\|$.

Calculer v_d en utilisant $f(r) = \mathrm{e}^{-r^2/2}$ dans la formule précédente (et la fonction Γ).

Exercice 6. Si A est un borélien borné de $\mathbb{R}^d$ et g une fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}^d$, on peut poser pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$(\mathbf{1}_{\mathrm{A}} * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\mathrm{A}}(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que la fonction $\mathbf{1}_{\mathrm{A}} * g$ est continue. Si A est de mesure positive, montrer que l'ensemble $\mathrm{A} - \mathrm{A} = \{a_1 - a_2 : a_1, a_2 \in \mathrm{A}\}$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$.

Exercice 7. On considère une fonction $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, et l'opérateur linéaire borné T_g de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ dans lui-même donné par

$$\forall f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}), \quad \mathrm{T}_g(f) = f * g.$$

a. Montrer que $\|\mathrm{T}_g\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^1)} = \|g\|_1$.
b. On suppose maintenant que g est 2π-périodique intégrable sur chaque période, et que g agit par convolution *périodique* sur les fonctions continues 2π-périodiques : pour toute $f \in \mathrm{C}_{2\pi\text{-per}}$ on pose $\mathrm{S}_g(f) = f *_{\mathrm{per}} g$. Montrer que la norme de l'opérateur S_g, agissant de $\mathrm{C}_{2\pi\text{-per}}$ dans lui-même, est égale à la norme de g dans $\mathrm{L}^1(0, 2\pi)$.
c. Déduire du théorème de Banach-Steinhaus qu'il existe des fonctions 2π-périodiques continues sur $\mathbb{R}$ dont la série de Fourier ne converge pas au point 0 (par exemple).

Exercice 8.
a. Inégalité de Hölder pour trois fonctions : on suppose que les nombres $\alpha, \beta, \gamma > 0$ vérifient $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Montrer que pour toutes fonctions mesurables positives u, v, w sur un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ on a

$$\int u^\alpha v^\beta w^\gamma \,\mathrm{d}\mu \leq \Bigl(\int u\,\mathrm{d}\mu\Bigr)^\alpha \Bigl(\int v\,\mathrm{d}\mu\Bigr)^\beta \Bigl(\int w\,\mathrm{d}\mu\Bigr)^\gamma.$$

b. On suppose que $\alpha, \beta, \gamma > 0$ vérifient $\alpha + \beta + \gamma = 2$. Montrer que pour toutes fonctions mesurables positives $\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}$ sur $\mathbb{R}^d$ on a

$$\int \mathrm{U}(x-y)^\alpha \mathrm{V}(y)^\beta \mathrm{W}(x)^\gamma \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \Bigl(\int \mathrm{U}(x)\,\mathrm{d}x\Bigr)^\alpha \Bigl(\int \mathrm{V}(x)\,\mathrm{d}x\Bigr)^\beta \Bigl(\int \mathrm{W}(x)\,\mathrm{d}x\Bigr)^\gamma.$$

En déduire que si $p, q, r \geq 1$ et $1/p + 1/q = 1 + 1/r$, on a $\mathrm{L}^p * \mathrm{L}^q \subset \mathrm{L}^r$, et plus précisément $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p\,\|g\|_q$ (*inégalité de convolution de Young*).
Indication pour un cas particulier, $\alpha = \beta = \gamma = 2/3$: on écrit le produit

$$\mathrm{U}(x-y)^{2/3}\mathrm{V}(y)^{2/3}\mathrm{W}(x)^{2/3}$$

comme produit des trois termes $(\mathrm{U}(x-y)\mathrm{V}(y))^{1/3}$, $(\mathrm{V}(y)\mathrm{W}(x))^{1/3}$ et $(\mathrm{U}(x-y)\mathrm{W}(x))^{1/3}$, on applique l'inégalité de Hölder pour trois fonctions avec les exposants $1/3, 1/3, 1/3$.

Exercice 9. On suppose que les espaces X, Y sont munis de mesures σ-finies μ, ν, et que $0 < r < p < +\infty$. Montrer que pour toute fonction mesurable positive f sur $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ on a

$$\Bigl(\int_{\mathrm{X}} \Bigl(\int_{\mathrm{Y}} f(x,y)^r \,\mathrm{d}\nu(y)\Bigr)^{p/r} \mathrm{d}\mu(x)\Bigr)^{1/p} \le \Bigl(\int_{\mathrm{Y}} \Bigl(\int_{\mathrm{X}} f(x,y)^p \,\mathrm{d}\mu(x)\Bigr)^{r/p} \mathrm{d}\nu(y)\Bigr)^{1/r}.$$

Exercice 10 : distance de Hausdorff. Soient (X, d) un espace métrique non vide et x_0 un point fixé dans X ; on désignera par $\mathcal{F}_b$ l'ensemble des fermés F non vides de X qui sont *bornés pour la distance d*, c'est-à-dire tels que $\sup_{y \in \mathrm{F}} d(y, x_0) < +\infty$. À chaque fermé $\mathrm{A} \in \mathcal{F}_b$ on associe la fonction φ_{A} définie sur X par

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad \varphi_{\mathrm{A}}(x) = d(x, \mathrm{A}) - d(x, x_0) = \inf\{d(x,a) - d(x, x_0) : a \in \mathrm{A}\}.$$

a. Montrer que φ_{A} est bornée sur X. Montrer que pour tous $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{F}_b$ on a

$$\|\varphi_{\mathrm{A}} - \varphi_{\mathrm{B}}\|_\infty = \max\bigl(\sup\{d(a, \mathrm{B}) : a \in \mathrm{A}\}, \sup\{d(b, \mathrm{A}) : b \in \mathrm{B}\}\bigr).$$

En déduire que la quantité précédente, qu'on notera $h(\mathrm{A}, \mathrm{B})$, est une distance sur l'ensemble $\mathcal{F}_b$ (c'est la *distance de Hausdorff* entre sous-ensembles fermés).

b. On suppose que (X, d) est complet ; montrer que $\mathcal{F}_b$ est complet pour la distance de Hausdorff.

Indication : considérer une suite de Cauchy (A_k) telle que $h(\mathrm{A}_k, \mathrm{A}_{k+1}) < 2^{-k-1}$ pour tout $k \geq 0$, et l'ensemble A des points $a \in \mathrm{X}$ qui sont limite d'une suite (a_k) avec $a_k \in \mathrm{A}_k$ pour tout $k \geq 0$. Montrer que tout point $a_k \in \mathrm{A}_k$ est à distance $< 2^{-k}$ d'un point de A (introduire une suite convergente de points $(a_n)_{n \geqslant k}$ avec $a_n \in \mathrm{A}_n$ en utilisant la définition de $h(\mathrm{A}_n, \mathrm{A}_{n+1})$). De façon analogue, montrer que tout point $a \in \mathrm{A}$ est à distance $< 2^{-k} + \varepsilon$ d'un point de A_k, pour tout $\varepsilon > 0$.

Exercice 11. Une suite (f_n) de fonctions continues sur $[0,1]$ converge simplement vers une fonction f ; on fixe $\varepsilon > 0$ et on pose pour tout entier $m \geq 0$

$$\mathrm{F}_m = \{x \in [0,1] : \sup_{n,p \geqslant m} |f_n(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon\}.$$

a. Vérifier que $[0,1]$ est réunion des ensembles fermés (F_m).

b. On définit la fonction $\mathrm{osc}(f)$ (oscillation de f) en posant

$$\mathrm{osc}(f)(x) = \lim_{\delta \to 0} \Bigl(\sup\{|f(y) - f(z)| : |y - x| + |z - x| < \delta\}\Bigr).$$

Montrer que l'ensemble $\{\mathrm{osc}(f) < \varepsilon\}$ est un ouvert. Vérifier que f est continue au point x si et seulement si $\mathrm{osc}(f)(x) = 0$. Majorer $\mathrm{osc}(f)(x)$ en un point x de l'intérieur de F_m.

c. Expliquer pourquoi tout intervalle ouvert $]a, b[$ est un espace topologique de Baire. Montrer que l'ensemble des points de continuité de f est un G_δ dense.

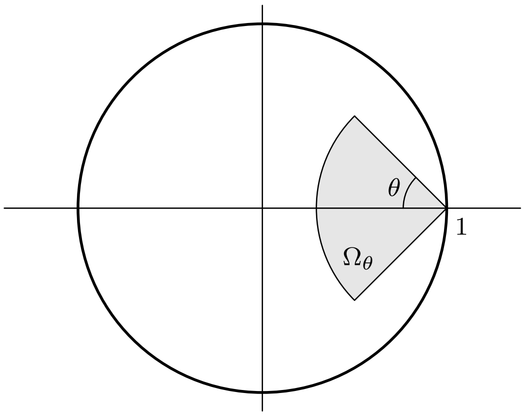
Exercice 12. Montrer qu'il existe une unique fonction f *croissante* (au sens large) sur $[0,1]$ qui vérifie les conditions

$$f(x) + f(1-x) = 1, \quad f(x/3) = f(x)/2$$

pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que f est continue sur $[0,1]$ (on devra montrer que $f(0) = 0$).

Exercice 13. Pour $0 < \theta < \pi/2$ on considère la partie de $\mathbb{C}$ définie par

$$\Omega_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(1-z)| < \theta,\ |1-z| < \cos\theta\}.$$



a. Montrer que Ω_θ est contenu dans le disque unité, et plus précisément

$$|z|^2 < 1 - |1-z|\cos\theta$$

pour tout $z \in \Omega_\theta$.

b. On suppose que $\sum a_n$ est une série convergente à termes complexes, et on pose pour $|z| < 1$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad \mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Évaluer $f(z) - \mathrm{S}$ en introduisant les restes $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$ (transformation d'Abel). Borner la quantité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |z^n - z^{n+1}|$$

lorsque $z \in \Omega_\theta$ et en déduire que $f(z)$ tend vers S quand z tend vers 1 par valeurs dans le domaine Ω_θ.

c. Si les séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ sont convergentes ainsi que la série produit $\sum c_n$, montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\Big).$$

Exercice 14. Un *poids* δ sur $[0,1]$ est une fonction > 0 sur $[0,1]$ quelconque ; un *intervalle pointé* est le couple $([u,v],w)$ d'un intervalle $[u,v]$ et d'un point $w \in [u,v]$. On dit que l'intervalle pointé $([u,v],w)$ est *δ-fin* si $v - u < \delta(w)$. Une *subdivision pointée* de $[0,1]$ consiste en la donnée de points $x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ et de points $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, n$. On dit qu'une subdivision pointée est *δ-fine* si chaque intervalle pointé $([x_{j-1}, x_j], \xi_j)$ de la subdivision est δ-fin.

a. Montrer que pour tout poids δ il existe une subdivision pointée δ-fine de $[0,1]$.

On dit qu'une fonction f réelle sur $[0,1]$ est RC-intégrable (RC pour *Riemann complete*) s'il existe une valeur I telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un poids δ tel que

$$\Big|\mathrm{I} - \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) f'(\xi_j)\Big| < \varepsilon$$

pour toute subdivision pointée $([x_{j-1}, x_j], \xi_j)_{j=1}^n$ de $[0,1]$ qui est δ-fine. On posera

$$\mathrm{I} = (\mathrm{RC}) \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

b. Montrer que la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ de l'ensemble des rationnels de $[0,1]$ est RC-intégrable d'intégrale nulle (énumérer les rationnels de $[0,1]$ et fabriquer un poids qui donne au $n$ème rationnel r_n une importance qui tend rapidement vers 0).

c. Soit f une fonction dérivable sur $[0,1]$, et soit $\varepsilon > 0$; montrer qu'il existe un poids δ tel que

$$\big|f(v) - f(u) - f'(w)(v-u)\big| < \varepsilon\,(v-u)$$

pour tout intervalle pointé $([u,v], w)$ qui est δ-fin. Montrer que f' est RC-intégrable et que l'on a

$$f(1) - f(0) = (\mathrm{RC}) \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t.$$