Exercice 1 : formule d'Euler-MacLaurin. On considère la suite de polynômes (P_n) définie par

$$\mathrm{P}_0 = 1, \quad \text{et} \quad \mathrm{P}'_{n+1} = \mathrm{P}_n, \quad \int_0^1 \mathrm{P}_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

pour tout entier $n \geq 0$. Déterminer P_1 et P_2 ; vérifier que le polynôme $\mathrm{B}_n = n!\,\mathrm{P}_n$ est unitaire de degré n (*polynôme de Bernoulli*).

a. Si f est de classe C^{n+1} sur $[0,1]$, montrer que

$$\begin{aligned} f(1) - f(0) = \ &\frac{f'(0)+f'(1)}{2} - \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \mathrm{P}_k(0)\bigl(f^{(k)}(1) - f^{(k)}(0)\bigr) \\ &+ (-1)^n \int_0^1 \mathrm{P}_n(t) f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{1}$$

b. En appliquant la formule (1) à la fonction $x \to \mathrm{e}^{-\lambda x}$, montrer que le DL au voisinage de 0 à tout ordre n de la fonction $\lambda \to \lambda/(\mathrm{e}^{\lambda}-1)$ est donné par

$$\frac{\lambda}{\mathrm{e}^{\lambda}-1} = \frac{\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}} = \sum_{k=0}^{n} c_k \lambda^k + \mathrm{O}(\lambda^{n+1}),$$

où on a posé $c_0 = 1$, $c_1 = \mathrm{P}_1(0) = -1/2$ et $c_k = \mathrm{P}_k(0)$ pour tout $k \geq 2$. Montrer que la fonction $\lambda \to \lambda/2 + \lambda/(\mathrm{e}^{\lambda}-1)$ est paire. En déduire que $c_{2k+1} = 0$ pour tout $k \geq 1$.

c. Récrire la formule (1) avec les polynômes de Bernoulli B_n et les nombres de Bernoulli $b_n = \mathrm{B}_n(0)$, en tenant compte de la remarque précédente.

d. Désignons par B^*_n la fonction 1-périodique sur $\mathbb{R}$ qui est égale à $x \to \mathrm{B}_n(x)$ quand $0 \leq x < 1$. Si f est de classe C^{2n+1} sur l'intervalle $[p,q]$, avec $p < q$ entiers, montrer que

$$\begin{aligned} f(q) - f(p) = \ &\frac{f'(p)}{2} + f'(p+1) + \cdots + f'(q-1) + \frac{f'(q)}{2} \\ &- \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{2k}}{(2k)!}\bigl(f^{(2k)}(q) - f^{(2k)}(p)\bigr) + \int_p^q \frac{\mathrm{B}^*_{2n}(t)}{(2n)!} f^{(2n+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Exercice 2. On considère une fonction F_0 sur $\mathbb{R}$, lipschitzienne de constante C et à support contenu dans un intervalle fermé borné $[a,b]$; on introduit d'autre part une suite $u_1, u_2, \ldots$ de réels > 0 telle que $\sum_n u_n < +\infty$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}_n(x) = \Bigl(\mathrm{F}_{n-1} * (u_n^{-1}\mathbf{1}_{[0,u_n]})\Bigr)(x) = \frac{1}{u_n}\int_{x-u_n}^{x} \mathrm{F}_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. Montrer que F_n est lipschitzienne de constante C, et que son support est contenu dans l'intervalle $[a, b + u_1 + \cdots + u_n]$. Montrer que F_n est de classe C^n sur $\mathbb{R}$. Vérifier que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{F}_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{F}_0(t)\,\mathrm{d}t.$$

b. Montrer que $|\mathrm{F}_n(x) - \mathrm{F}_{n-1}(x)| \leq \mathrm{C}u_n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (cette inégalité n'est pas optimale mais nous suffira).

c. Montrer que F_n converge uniformément vers une fonction F de classe C^∞ à support compact (*indication* : remplacer F_0 par $\mathrm{F}'_1, \mathrm{F}''_2, \ldots$). Vérifier que l'intégrale de F est égale à celle de F_0 et que le support de F est contenu dans l'intervalle $[a, b + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n]$.

Exercice 3. Montrer qu'il existe un nombre L tel que pour tout $\delta \in]0, \pi]$, on ait

$$\lim_n \sqrt{n} \int_{-\delta}^{\delta} \Bigl(\frac{1+\cos x}{2}\Bigr)^n \,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = \mathrm{L}.$$

En déduire que la suite de fonctions (φ_n) définie par

$$\varphi_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{\mathrm{L}} \Bigl(\frac{1+\cos x}{2}\Bigr)^n$$

est une approximation de l'unité 2π-périodique formée de polynômes trigonométriques. Si f est 2π-périodique et intégrable sur chaque période, et a tous ses coefficients de Fourier nuls, montrer que f est nulle presque-partout.

Exercice 4. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 5. Déterminer les racines du polynôme

$$\mathrm{P}_{n-1} = \frac{1}{n}\bigl(\mathrm{X}^n - (\mathrm{X}-1)^n\bigr) = \mathrm{X}^{n-1} - \frac{n-1}{2}\,\mathrm{X}^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{6}\,\mathrm{X}^{n-3} + \cdots$$

puis calculer la somme $\sigma_2(n)$ des carrés des racines grâce aux relations entre coefficients et racines. Que trouve-t-on quand $n \to +\infty$, en comparant les deux expressions trouvées pour $n^{-2}\sigma_2(n)$?

Exercice 6. Soit f une fonction 2π-périodique, continue et C^1 par morceaux ; montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

Exercice 7. Si deux fonctions $f, g \in \mathrm{L}^1(0, 2\pi)$ sont égales dans un intervalle non vide $]s-\varepsilon, s+\varepsilon[$, montrer que $\lim_n \bigl((\mathrm{S}_n f)(s) - (\mathrm{S}_n g)(s)\bigr) = 0$ (principe de localisation).

Exercice 8. On donne un paramètre réel ou complexe $a \notin \mathbb{Z}$, et on définit une fonction 2π-périodique f_a sur $\mathbb{R}$ en posant

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \quad f_a(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}.$$

Expliciter le résultat obtenu en appliquant le théorème de convergence de Dirichlet à la fonction f_a au point $x = \pi$.

Exercice 9. Pour chaque entier $k \ge 1$ définissons une fonction f_k **paire**, continue et 2π-périodique par

$$f_k(x) = \sin(kx + x/2)$$

lorsque $0 < x < \pi$. Montrer que si $\ell \ne k$,

$$(\mathrm{S}_\ell f_k)(0) = (\mathrm{S}_k f_\ell)(0).$$

Si $2k \le \ell$, montrer que pour $n \le k$ on a

$$|c_n(f_\ell)| \le \frac{4}{(2k+1)\pi} \quad \text{donc} \quad |(\mathrm{S}_k f_\ell)(0)| \le \frac{4}{\pi}.$$

Montrer qu'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que $(\mathrm{S}_\ell f_\ell)(0) \ge \kappa \ln \ell$ pour tout $\ell \ge 1$, et conclure que $(\mathrm{S}_n f)(0)$ ne converge pas pour la fonction f continue de *l'exemple de Fejér*

$$f = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{f_{2^{p^3}}}{p^2}.$$

Exercice 10. *Dans cet exercice, on ne suppose pas connue la théorie des séries de Fourier ; au contraire, il s'agit de proposer une preuve un peu différente pour la densité des polynômes trigonométriques. L'étudiant attentif pourra y voir une variante d'une démonstration courante du théorème de Dirichlet (qui lui aussi, implique la densité des polynômes trigonométriques).*

a. On désigne par X l'espace vectoriel des fonctions 2π-périodiques de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes. Montrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathrm{X}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\varphi)$ converge absolument ; on peut donc poser

$$\ell(\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\varphi)\,;$$

vérifier que ℓ est linéaire sur X.

b. Si $\psi \in \mathrm{X}$ et si on définit φ par $\varphi(x) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 1)\,\psi(x)$, montrer que $\ell(\varphi) = 0$.

c. Si φ est 2π-périodique de classe C^3, montrer que la fonction ψ définie pour $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ par

$$\varphi(x) = \varphi(0) + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 1)\,\psi(x)$$

se prolonge en un élément $\psi \in \mathrm{X}$.

d. Si φ est 2π-périodique de classe C^3, montrer que

$$\varphi(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\varphi), \quad \text{puis} \quad \varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\varphi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que l'espace des polynômes trigonométriques est dense dans l'espace des fonctions continues 2π-périodiques muni de la norme uniforme.

Exercice 11. Soit f une fonction de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ nulle hors de $[-\pi, \pi]$, et désignons par f_0 la fonction 2π-périodique qui coïncide avec f sur $[-\pi, \pi[$; exprimer les coefficients de Fourier $c_n(f_0)$ de la fonction f_0 à partir de la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f. Appliquer à f_0 la relation de Bessel-Parseval des séries de Fourier pour évaluer

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x$$

à partir de certaines valeurs de $\widehat{f}$. Pour chaque $s \in [0, 1]$, appliquer le calcul précédent à la fonction $f_s(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}$. Intégrer le résultat en $s \in [0, 1]$; qu'obtient-on ?

Exercice 12. On suppose que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que f, f', f'' sont intégrables. Montrer que $\widehat{f}(t)$ est $\mathrm{O}(|t|^{-2})$ lorsque $|t| \to +\infty$.

Exercice 13. Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x < +\infty$ pour tout nombre réel a ; montrer que la transformée de Fourier de f se prolonge au plan complexe et que ce prolongement, qu'on notera

$$\widehat{f}(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xz}\,\mathrm{d}x$$

est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini.

Appliquer cette remarque à la fonction gaussienne $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$; montrer que $\widehat{f}(\mathrm{i}t)$ se calcule explicitement pour t réel, et en déduire la valeur de $\widehat{f}(t)$.

Exercice 14 : formule de Poisson. Soit G une fonction paire positive sur $\mathbb{R}$, décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et telle que $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{G}(x)\, \mathrm{d}x < +\infty$; soit F une fonction continue sur $\mathbb{R}$, telle que $|\mathrm{F}(x)| \le \mathrm{G}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que la fonction $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{F}(x+2\pi n)$ est définie, continue et 2π-périodique.

b. Trouver une relation entre les valeurs $\widehat{\mathrm{F}}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ et les coefficients de Fourier de f.

c. On suppose de plus que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\mathrm{F}}(n)| < +\infty$. Démontrer la *formule de Poisson*,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{F}(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\mathrm{F}}(n).$$

Expliciter l'égalité obtenue en appliquant à $\mathrm{F}(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$, $a > 0$, puis étendre au cas a complexe.

Exercice 15. Soit $(\mathrm{U}_n)_{n\ge1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$; montrer que la loi de la variable aléatoire

$$\mathrm{U} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}\, \mathrm{U}_n$$

admet une densité de classe C^∞ à support compact.
Indication : on pourra s'intéresser à la fonction caractéristique de la variable aléatoire U (transformée de Fourier de la loi de U).

Exercice 16 : théorème de Borel. Pour les besoins de l'exercice, on appellera *série de fonctions de type* (B) toute série de fonctions sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$(\beta) \qquad x \in \mathbb{R} \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}\, \theta(b_n x)$$

où $(a_n)_{n\ge0}$ est une suite de nombres réels ou complexes, (b_n) une suite de réels > 1 telle que $\ln(1 + |a_n|) = \mathrm{O}(\ln(b_n))$ quand $n \to +\infty$, et où θ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $[-1, 1]$.

a. Montrer que toute série de type (B) est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. *Indication :* on notera que pour borner uniformément $x^n\theta(b_n x)$, seuls comptent les x tels que $|x| \le 1/b_n$.
b. On suppose de plus que la fonction θ de la série (β) est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; montrer que la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}\, \theta(b_n x)$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et que sa dérivée peut se calculer par dérivation terme à terme. *Indication :* on notera que la série dérivée de la série (β) s'exprime comme la somme de deux séries qui sont encore de type (B).
c. En déduire par récurrence que si θ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, la fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, et que ses dérivées peuvent se calculer par dérivations terme à terme successives.
d. On suppose de plus, pour finir, que θ est C^∞ et égale à 1 dans un voisinage de 0. Montrer que

$$f^{(n)}(0) = a_n$$

pour tout $n \ge 0$.
e. Étant donnée une suite (a_n) quelconque, montrer qu'il existe une fonction f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ qui admet ces nombres comme dérivées successives au point 0.