**Exercice 1.** Si une fonction $f$ continue et $2\pi$-périodique sur $\mathbb{R}$ vérifie une condition de Hölder d'ordre $\alpha > 1/2$, c'est-à-dire qu'il existe un nombre M tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \le \mathrm{M}\, |x - y|^\alpha,$$

montrer que ses coefficients de Fourier sont absolument sommables.
*Indication* : considérer pour $t$ fixé dans $(0, 2\pi)$ la fonction $g_t(x) = (f(x-t) - f(x))/t^\alpha$ ; lui appliquer Parseval, puis intégrer par rapport à $\mathrm{d}t/t^\beta$ le résultat obtenu, $0 < \beta < 1$. En déduire d'abord que $\sum |n|^{2\alpha-\varepsilon}\, |c_n(f)|^2 < +\infty$, pour tout $\varepsilon > 0$.

**Exercice 2.**
*a.* Calculer les coefficients de Fourier complexes de la fonction $2\pi$-périodique qui est égale à $\mathbf{1}_{[0,\pi[}$ sur $[0, 2\pi[$.
*b.* On considère le sous-ensemble borné A de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\mathrm{A} = \{(s\cos\theta, s\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le s \le f(\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi\},$$

où $f$ est une fonction continue $2\pi$-périodique $> 0$. Exprimer par une intégrale de la forme $\int_\alpha^\beta k(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ la surface de la partie de A correspondant aux points $(s\cos\theta, s\sin\theta)$ tels que $0 \le s \le f(\theta)$ et $\alpha \le \theta \le \beta$, où $0 < \beta - \alpha \le 2\pi$.
*c.* On suppose maintenant que A possède la propriété suivante : toute droite passant par le point 0 découpe A en deux parties de même surface. Montrer que l'ensemble A est symétrique par rapport à l'origine (autrement dit, la fonction $f$ vérifie $f(\theta) = f(\theta + \pi)$).

**Exercice 3.** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)/x$. On sait que l'intégrale de $f$ est semi-convergente et on pose

$$\ell = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

*a.* Montrer que la fonction $f$ est dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.
*b.* Montrer que

$$g(t) = \lim_n \int_{-n}^{n} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}x$$

existe pour tout $t$, et calculer sa valeur (en fonction de $t$ et de $\ell$).
*c.* Déduire la valeur de $\ell$ de la formule d'inversion et du fait que $f$ est la transformée de Fourier de $\frac{1}{2}\mathbf{1}_{(-1,1)}$.

**Exercice 4 :** Théorème de Fejér sur $\mathbb{R}$.
*a.* Déterminer la transformée de Fourier de la fonction paire $f$ sur $\mathbb{R}$ qui vaut

$$f(x) = (2-x)/4 \text{ si } 0 \le x \le 2, \quad f(x) = 0 \text{ si } x \ge 2.$$

*b.* On pose

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2,$$

et $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$ pour tout entier $n \ge 1$. Si $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, exprimer la transformée de Fourier de $f * \varphi_n$ à partir de celle de $f$.
*c.* Montrer que si $f$ est bornée, intégrable sur $\mathbb{R}$ et continue au point $x$, on a

$$f(x) = \lim_n \frac{1}{2\pi} \int_{-2n}^{2n} \widehat{f}(y)\Big(1 - \frac{|y|}{2n}\Big)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y.$$

*d.* Énoncer un théorème de convergence dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, $p = 1$ ou $p = 2$, analogue au théorème de Fejér pour les séries de Fourier.

**Exercice 5 :** transformée de Hilbert.

*a.* Pour tout $\varepsilon > 0$ on considère la fonction $f_\varepsilon$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\varepsilon(x) = \frac{\mathbf{1}_{|x|>\varepsilon}}{\pi x}.$$

Vérifier que $f_\varepsilon$ est dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et calculer sa transformée de Fourier.

*b.* Montrer que pour toute $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ la convolution $g * f_\varepsilon$ tend vers une limite $\mathrm{H}g$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ quand $\varepsilon \to 0$. Montrer que H définit une application linéaire continue de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, isométrique ; déterminer $\mathrm{H}^2$.

*c.* Montrer que si $\theta$ est à support compact, paire, égale à 1 dans un voisinage de 0, on a pour toute $\varphi$ fonction $\mathrm{C}^1$ à support compact et tout $x \in \mathbb{R}$

$$(\mathrm{H}\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x-y) - \varphi(x)\theta(y)}{\pi y} \,\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\varphi(x-y)}{\pi y} \,\mathrm{d}y.$$

**Exercice 6 :** base de Shannon sur $\mathbb{R}$.

*a.* Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ on considère l'intervalle $\mathrm{I}_n = (2n-1, 2n+1)$. Montrer que le système des fonctions

$$f_{n,k}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_{\mathrm{I}_n}(x) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi k x}, \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

*b.* Expliciter la base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ obtenue par transformation de Fourier.

*c.* On considère le sous-espace fermé de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ formé des fonctions dont la transformée de Fourier est nulle en dehors de $[-1, 1]$. Déduire de la question précédente une base hilbertienne pour ce sous-espace.

**Exercice 7 :** la base de Haar pour $\mathrm{L}^2(0,1)$. On définit la fonction $\varphi$ sur $\mathbb{R}$ en posant $\varphi(x) = 1$ si $x \in [0, 1/2[$, $\varphi(x) = -1$ si $x \in [1/2, 1[$, et $\varphi$ nulle ailleurs sur $\mathbb{R}$. Pour $n \geq 0$ et $j = 0, \ldots, 2^n - 1$, on pose

$$\forall x \in [0, 1[, \quad h_{n,j}(x) = 2^{n/2} \varphi(2^n x - j).$$

Montrer que la famille de fonctions formée de $\mathbf{1}$ et de toutes les fonctions $h_{n,j}$, $n \geq 0$ et $j = 0, \ldots, 2^n - 1$, est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(0,1)$.

**Exercice 8.** On définit une suite de matrices en posant $\mathrm{A}_0 = (1)$ (matrice de taille $1 \times 1$) puis pour tout $n \geq 0$

$$\mathrm{A}_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{A}_n & \mathrm{A}_n \\ -\mathrm{A}_n & \mathrm{A}_n \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\mathrm{A}_n$ est orthogonale pour tout $n$, de déterminant égal à 1.

On définit une fonction $\varphi$ sur $\mathbb{R}$ en posant $\varphi(x) = 1$ sur $[2k, 2k+1[$, $k \in \mathbb{Z}$ et $\varphi(x) = -1$ sinon ; on pose ensuite pour tout $x \in [0, 1[$,

$$\varepsilon_n(x) = \varphi(2^n x)$$

pour tout $n \geq 1$. Pour tout ensemble fini $\mathrm{A} \subset \mathrm{N}^*$, on pose

$$\forall x \in [0, 1[, \quad w_{\mathrm{A}}(x) = \prod_{j \in \mathrm{A}} \varepsilon_j(x)$$

(sans oublier l'ensemble vide, pour lequel $w_\emptyset = \mathbf{1}$). Montrer que la famille de toutes les fonctions $(w_{\mathrm{A}})$ est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(0,1)$.

**Exercice 9.** On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$, borné ou non, et une mesure $\mu$ sur I, de la forme $\mathrm{d}\mu(x) = w(x)\,\mathrm{d}x$, où $w$ est une fonction $> 0$ sur I, mesurable à valeurs finies. On suppose qu'il existe une valeur $\alpha > 0$ telle que

$$\int_{\mathrm{I}} \mathrm{e}^{\alpha|x|}\ w(x)\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

*a.* Montrer que l'espace $\mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \mu)$ contient toutes les fonctions polynomiales. Montrer que le sous-espace des fonctions polynomiales est dense dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \mu)$. *Indication* : si $f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \mu)$ est orthogonale à tous les polynômes, montrer que la fonction holomorphe $g$ définie pour $|\operatorname{Re} z| < \alpha/2$ par

$$g(z) = \int_{\mathrm{I}} \mathrm{e}^{zx}\, f(x)\, w(x)\,\mathrm{d}x$$

est nulle ; en déduire que $\widehat{fw}$ est nulle, donc $f$ aussi.
Montrer qu'il existe une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \mu)$ formée de polynômes orthogonaux.

*b.* Montrer que le résultat s'applique lorsque $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ et $w(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ (mesure gaussienne, polynômes d'Hermite), ou bien $\mathrm{I} = [0, \infty)$ et $w(x) = \mathrm{e}^{-x}$ (polynômes de Laguerre).

**Exercice 10.** On fixe un entier $n_0$. Montrer que la famille des monômes $t \to t^n$, pour tous les $n \geq n_0$, engendre un sous-espace vectoriel dense dans $\mathrm{L}^2(0, 1)$.

**Exercice 11 :** déterminants de Gram. Soient $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ des vecteurs d'un espace de Hilbert, tels que $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ soit de dimension $n$ ; montrer que la distance de $x_{n+1}$ au sous-espace F est donnée par la formule

$$\mathrm{dist}^2(x_{n+1}, \mathrm{F}) = \frac{\det\bigl(\langle x_i, x_j\rangle\bigr)_{i,j=1,\ldots,n+1}}{\det\bigl(\langle x_i, x_j\rangle\bigr)_{i,j=1,\ldots,n}}\,.$$

**Exercice 12.** On suppose que $\mu$ est une mesure infinie, et on désigne par X l'espace vectoriel des fonctions réelles $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mu) \cap \mathrm{L}^4(\Omega, \mu)$.

*a.* Montrer que X est complet pour la norme définie par $\|f\|_{\mathrm{X}} = \|f\|_2 + \|f\|_4$.

*b.* Montrer que toute fonction $g \in \mathrm{L}^2 + \mathrm{L}^{4/3}$, c'est-à-dire de la forme $g = g_0 + g_1$ avec $g_0 \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mu)$ et $g_1 \in \mathrm{L}^{4/3}(\Omega, \mu)$, définit une forme linéaire $\xi$ continue sur X par la formule

$$\forall f \in \mathrm{X}, \quad \xi(f) = \int_\Omega fg\,\mathrm{d}\mu.$$

*c.* On suppose que $\ell$ est une forme linéaire continue sur X (muni de la norme précédente) et on définit une fonction réelle $\varphi$ sur X en posant

$$\forall f \in \mathrm{X}, \quad \varphi(f) = \int_\Omega (f^2 + f^4)\,\mathrm{d}\mu - \ell(f)\,;$$

montrer que

$$m = \inf\{\varphi(f) : f \in \mathrm{X}\} > -\infty.$$

Vérifier que pour toutes $f, h \in \mathrm{X}$

$$\frac{1}{2}\bigl(\varphi(f+h) + \varphi(f-h)\bigr) - \varphi(f) \geq \int_\Omega (h^2 + h^4)\,\mathrm{d}\mu.$$

En déduire que le diamètre du fermé $\mathrm{F}_\varepsilon = \{\varphi \leq m + \varepsilon\} \subset \mathrm{X}$ tend vers 0 quand $\varepsilon > 0$ tend vers 0, puis que $\varphi$ atteint son minimum $m$ en un point unique $f_0 \in \mathrm{X}$.

Montrer que la forme linéaire $\ell$ provient de la fonction $g = 2f_0 + 4f_0^3 \in \mathrm{L}^2 + \mathrm{L}^{4/3}$.

*d.* Pour $2 < p < 4$, montrer que X s'injecte continûment dans $\mathrm{L}^p(\Omega, \mu)$, avec image dense. En déduire que les formes linéaires sur $\mathrm{L}^p(\Omega, \mu)$ proviennent des fonctions de $\mathrm{L}^q(\Omega, \mu)$, $1/q + 1/p = 1$.

**Exercice 13 :** variante du théorème d'analyticité de Bernstein.

*a.* Soit $f$ une fonction concave positive de classe $\mathrm{C}^2$ sur l'intervalle $[-1, 1]$, telle que $f''$ soit convexe ; montrer que

$$|f'(0)| \le f(0) \,; \qquad |f''(0)| \le 3 f(0).$$

*Indication :* pour la deuxième inégalité, on utilisera la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre deux entre les points 0 et 1 (ou entre $-1$ et 0), et une majoration sur $[0, 1]$ (ou sur $[-1, 0]$) de la fonction convexe $f''$ par une fonction affine.

*b.* Quelle inégalité obtient-on si on remplace $[-1, 1]$ par un intervalle $[-h, h]$ ?

*c.* Si $f$ est positive, de classe $\mathrm{C}^\infty$ sur $[-a-h, a+h]$, et si $(-1)^k f^{(2k)} \ge 0$ sur $[-a-h, a+h]$ pour tout entier $k \ge 1$, montrer qu'il existe une constante C (dépendant de $h$) telle que

$$\forall n \ge 1, \quad \sup_{|x| \le a} |f^{(n)}(x)| \le \mathrm{C}^n \sup_{|x| \le a} |f(x)|.$$

*d.* En déduire que si $f$ est de classe $\mathrm{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert I, et si $(-1)^k f^{(2k)} \ge 0$ sur I pour tout entier $k \ge 0$, alors $f$ est analytique sur I ; plus précisément, montrer que si $\mathrm{I} = ]x_0 - r, x_0 + r[$ pour un $r > 0$, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

pour tout $x \in \mathrm{I}$ (variante du théorème de Bernstein).

**Exercice 14.** Le polynôme de Tchebychev $\mathrm{T}_n$ est déterminé par le fait que pour tout $\theta$ réel, on a $\mathrm{T}_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$. Montrer qu'on a aussi

$$\mathrm{T}_n(\operatorname{ch}\theta) = \operatorname{ch}(n\theta)$$

pour tout $\theta$, et que pour $x \ge 1$,

$$\mathrm{T}_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}.$$