Exercice 15 : polynômes d'Hermite. On pose pour tout entier $n \ge 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{H}_n(x) = (-1)^n \,\mathrm{e}^{x^2} \,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big(\mathrm{e}^{-x^2}\big).$$

a. Montrer que H_n est un polynôme de degré n. Calculer H_0, H_1 et H_2.

b. Montrer que pour tout $n \ge 0$, la fonction $h_n : x \to \mathrm{H}_n(x)\ \mathrm{e}^{-x^2/2}$ est un vecteur propre de la transformation de Fourier (on pourra utiliser une relation de récurrence entre h'_n, h_n et h_{n+1}, et les rapports entre Fourier et dérivation). Quelles sont les valeurs propres possibles pour la transformation de Fourier $\mathcal{F}$, agissant sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$?

c. Soit φ la fonction définie par $\varphi(z) = \mathrm{e}^{-z^2}$; on rappelle que $\varphi^{(n)}(x_0)$ s'exprime à partir des polynômes (H_n). Exprimer le développement en série de Taylor de $t \to \varphi(x_0 - t)$. En déduire la *fonction génératrice* des polynômes d'Hermite,

$$\mathrm{e}^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{H}_n(x)\,\frac{t^n}{n!}\cdot$$

Exercice 16. On désigne par U le disque unité ouvert du plan complexe. Soit f une fonction holomorphe de U dans U ; utiliser la série de Taylor de f en 0 et la théorie des séries de Fourier pour montrer que : on a $|f'(0)| \le 1$, et si $|f'(0)| = 1$, alors il existe λ de module 1 tel que $f(z) = \lambda z$ pour tout $z \in \mathrm{U}$ (le lecteur aura reconnu le très classique *lemme de Schwarz*, sous un habillage à peine moins classique).

Exercice 17 : injectivité de la transformation de Laplace. Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors d'un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ et telle que $x \to f(x)\,\mathrm{e}^{-s_0 x}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$ pour un $s_0 \in \mathbb{R}$; on définit la *transformée de Laplace* $\mathcal{L}f$ de la fonction f sur l'ouvert $\mathrm{U} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > s_0\}$ du plan complexe par

$$\forall z \in \mathrm{U}, \quad (\mathcal{L}f)(z) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-zx}\, f(x)\, dx.$$

Montrer que $\mathcal{L}f$ est holomorphe dans U. Montrer que si $\mathcal{L}f$ est nulle sur un intervalle non vide de $]s_0, +\infty[$, alors f est nulle presque partout sur $\mathbb{R}$. *Indication* : on devra apercevoir une transformée de Fourier.

Exercice 18.

a. Soit φ une fonction de $\mathrm{L}^2(0, 2\pi)$, avec une série de Fourier de la forme $\sum_{n\ge 0} c_n\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ (autrement dit, tous ses coefficients de Fourier négatifs sont nuls) ; montrer qu'il existe une unique fonction holomorphe f dans le disque unité U du plan complexe telle que les fonctions φ_r, définies pour $r < 1$ par la formule $\varphi_r(\theta) = f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ convergent vers φ dans $\mathrm{L}^2(0, 2\pi)$, lorsque $r \to 1$.

b. Montrer que pour chaque fonction *réelle* $\psi \in \mathrm{L}^2(0, 2\pi)$ il existe une unique fonction réelle $\mathrm{H}(\psi) \in \mathrm{L}^2(0, 2\pi)$ d'intégrale nulle telle que la fonction $\varphi = \psi + \mathrm{i}\mathrm{H}(\psi)$ vérifie les conditions du paragraphe précédent. Montrer que H définit un opérateur linéaire borné sur $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}(0, 2\pi)$ et calculer sa norme.

c. Si ψ est d'intégrale nulle, montrer que $\int_0^{2\pi} \psi^2 - \int_0^{2\pi} (\mathrm{H}\psi)^2 = \int_0^{2\pi} \psi(\mathrm{H}\psi) = 0$. Si u est un polynôme trigonométrique réel et d'intégrale nulle, poser $v = \mathrm{H}u$ et déterminer $\mathrm{H}(u^2 - v^2)$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} \big(u^4(x) + v^4(x)\big)\,\mathrm{d}x = 6 \int_0^{2\pi} u^2(x) v^2(x)\,\mathrm{d}x$$

et en déduire que H est borné sur $\mathrm{L}^4(0, 2\pi)$ (noter que $2s^2t^2 \le \varepsilon^{-1}s^4 + \varepsilon t^4$).