Exercice 1 : régularité des mesures sur la tribu borélienne d'un espace polonais. Soit μ une probabilité sur la tribu borélienne d'un espace métrique (X, d) complet et séparable ; le but de l'exercice est de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $\mathrm{K}_\varepsilon \subset \mathrm{X}$ tel que $\mu(\mathrm{K}_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$.

a. Montrer que pour tous $r > 0$ et $\alpha > 0$, il existe un fermé F de X qui est contenu dans une réunion finie de boules de rayon r, et qui est tel que $\mu(\mathrm{F}) > 1 - \alpha$.

Indication : soit $(x_n)_{n\ge 0}$ une suite dense dans X *; posons $\mathrm{A}_n = \bigcup_{i=0}^n \mathrm{B}(x_i, r/2)$. On verra que la suite (A_n) est croissante et recouvre* X.

b. Conclure en appliquant ce qui précède avec $r = 2^{-k}$ et $\alpha = \varepsilon/2^{k+1}$, pour tout $k \ge 0$.

Indication : on obtient ainsi une suite (F_k) de fermés telle que $\mu(\mathrm{F}_k) > 1 - 2^{-k-1}\varepsilon$ pour tout entier $k \ge 0$; considérer $\mathrm{K} = \bigcap_{k\ge 0} \mathrm{F}_k$.

Exercice 2.

a. Montrer qu'il existe une constante C_1 telle que pour $0 \le t \le \pi$ et u réel, on ait

$$\Bigl| \int_0^t \frac{\sin(ux)}{\sin(x/2)}\,\mathrm{d}x - \int_0^t \frac{\sin(ux)}{x/2}\,\mathrm{d}x \Bigr| \le \mathrm{C}_1.$$

En déduire que les sommes de Fourier symétriques $(\mathrm{S}_n\chi)$ des fonctions χ indicatrices d'intervalles $[a, b]$, $-\pi \le a \le b \le \pi$, sont uniformément bornées par une constante C_2 indépendante de l'intervalle.

b. Soit f une fonction 2π-périodique intégrable sur $[-\pi, \pi]$ telle que $c_0(f) = 0$ et posons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\,;$$

montrer que F est 2π-périodique. Montrer que les sommes $\sum_{k=-n}^n c_k(\mathrm{F})$ sont bornées par $\mathrm{C}_2 \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

c. Montrer que la série trigonométrique

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\ln n}$$

converge pour tout x, mais qu'il n'existe pas de fonction 2π-périodique impaire f, intégrable sur chaque période telle que $b_n(f) = 1/\ln n$ pour tout $n \ge 1$.

Exercice 3. On désigne par Δ l'ensemble triadique de Cantor, et par f_α, $\alpha > 0$, la fonction sur $[0, 1]$, à valeurs $[0, +\infty]$, définie par

$$f_\alpha(x) = d(x, \Delta)^{-\alpha} \text{ si } x \notin \Delta, \quad f_\alpha(x) = +\infty \text{ si } x \in \Delta.$$

a. Montrer que f_α est continue de $[0, 1]$ dans $[0, +\infty]$. Montrer qu'il existe des valeurs de $\alpha > 0$ telles que f_α soit intégrable sur $[0, 1]$.

b. Pour une telle valeur de α, montrer que la fonction F_α définie par

$$\forall x \in [0, 1], \quad \mathrm{F}_\alpha(x) = \int_0^x f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$$

admet en tout point une dérivée finie ou bien égale à $+\infty$. Calculer $b_\alpha = \mathrm{F}_\alpha(1)$.

c. Si φ est la fonction de Cantor, montrer que F_α et $\mathrm{F}_\alpha + \varphi$ admettent en tout point la même dérivée finie ou égale à $+\infty$, mais que leur différence n'est pas constante.

d. Montrer que F_α est strictement croissante de $[0,1]$ sur $[0,b_\alpha]$. Montrer que la fonction réciproque $\mathrm{G}_\alpha : [0,b_\alpha] \to [0,1]$ est de classe C^1. Soit C_α l'ensemble des points critiques de G_α ; déterminer l'ensemble des valeurs critiques $\mathrm{G}_\alpha(\mathrm{C}_\alpha)$.

Exercice 4. Algorithme de Borel : on donne une suite $(\mathrm{I}_n)_{n\geq 0}$ d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ qui couvrent $[0,1]$. On pose $x_0 = 0$ et on désigne par n_0 le premier entier tel que $x_0 \in \mathrm{I}_{n_0}$; si x_k, n_k sont définis, on désigne par x_{k+1} l'extrémité de I_{n_k} et dans le cas $x_{k+1} \leq 1$, on désigne par n_{k+1} le premier entier n tel que I_n contienne x_{k+1}. Montrer qu'il existe un entier k tel que $[0,1]$ soit la réunion de $\mathrm{I}_0, \ldots, \mathrm{I}_{n_k}$.

Exercice 5. Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe s, t tels que $0 \leq s < t \leq 1$ et $f(t) - f(s) = 1/2$.

Indication : sur le triangle T des points (s,t) tels que $0 \leq t \leq s \leq 1$, on définit $\varphi(s,t) = f(s) - f(t)$, et on considère l'indice autour de $1/2$ du chemin fermé (lacet) γ obtenu en composant φ avec le parcours du bord de T dans le sens positif.

Exercice 6. On désigne par B une matrice complexe de taille $d \times d$, et par K l'ensemble de ses valeurs propres. On considère un chemin fermé γ dans $\mathbb{C}$ qui ne rencontre pas K et on lui associe la matrice

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma (z\mathrm{I}_d - \mathrm{B})^{-1}\, dz.$$

a. Montrer que pour r assez grand et $\gamma = \gamma_r$ (le parcours positif habituel du cercle de rayon r centré en 0), la matrice P est égale à la matrice unité I_d.

b. On suppose que γ parcourt (une fois) un cercle dans le sens direct, et que ce cercle contient exactement une valeur propre λ de B. Montrer que la matrice P est un projecteur sur le sous-espace caractéristique de B associé à la valeur propre λ.

c. Si γ est un chemin fermé qui ne rencontre pas K, montrer que la matrice P est une combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs de projecteurs caractéristiques.

Exercice 7. Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$; calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

en utilisant l'holomorphie et un changement de contour (on introduira la demi-droite imaginaire $\mathbb{R}_+\,\mathrm{i}$; la fonction Γ devrait apparaître).

Exercice 8.

a. On considère une fonction borélienne positive φ sur $[0,\infty) \times [0,1]$ et un nombre réel p tel que $1 \leq p < +\infty$. Montrer le cas suivant de *l'inégalité intégrale de Minkowski*, dont on aura besoin plus loin,

$$\Bigl(\int_0^{+\infty} \Bigl(\int_0^1 \varphi(x,y)\,\mathrm{d}y\Bigr)^p \mathrm{d}x\Bigr)^{1/p} \leq \Bigl(\int_0^1 \Bigl(\int_0^{+\infty} \varphi(x,y)^p\,\mathrm{d}x\Bigr)^{1/p} \mathrm{d}y.$$

b. Montrer l'inégalité suivante, dans le cas $1 < p \le +\infty$ (une *inégalité de Hardy*)

$$\Bigl(\int_0^{+\infty} \Bigl(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\Bigr)^p \mathrm{d}x\Bigr)^{1/p} \le \frac{p}{p-1}\,\|f\|_{\mathrm{L}^p(0,\infty)}.$$

c. Montrer que l'application linéaire T_p qui associe à chaque $f \in \mathrm{L}^p(0,\infty)$ la fonction F définie sur $(0,\infty)$ par $\mathrm{F}(x) = x^{-1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue de L^p dans L^p et que

$$\|\mathrm{T}_p\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^p)} = \frac{p}{p-1}.$$

Indication : quand $\varepsilon > 0$ tend vers 0, comparer les normes des fonctions f_ε et $\mathrm{T}f_\varepsilon$, où on a posé $f_\varepsilon(x) = x^{-1/p}$ quand $\varepsilon < x < 1$ et $f_\varepsilon(x) = 0$ sinon ; on minorera la norme de la fonction $\mathrm{T}f_\varepsilon$ en ne regardant que l'intervalle $[\varepsilon, 1]$.

Exercice 9. Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

à partir du logarithme complexe $\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} z^n/n$, appliqué à $z = r\,\mathrm{e}^{\pm ix}$, avec $0 < r < 1$, r tendant vers 1.

Exercice 10. On considère l'espace de Hilbert réel $\mathrm{H} = \ell_2(\mathbb{N})$. On se donne une suite de nombres $c_n > 0$ telle que $\sum c_n^2 < +\infty$, et on considère

$$\mathrm{C} = \{x = (x_n)_{n\ge0} \in \mathrm{H} : \forall n \ge 0,\ |x_n| \le c_n\}.$$

Montrer que C est compact. Montrer que l'application φ de $\mathrm{K} = [-1,1]^{\mathbb{N}}$ (muni de la topologie produit) dans H, définie par

$$\forall y = (y_n) \in \mathrm{K}, \quad \varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n c_n \mathbf{e}_n$$

est un homéomorphisme de K sur C (on a noté $(\mathbf{e}_n)_{n\ge0}$ la base hilbertienne canonique de l'espace H).

On appelle souvent cet ensemble, sous une forme ou l'autre, le *cube de Hilbert*.

Exercice 11. Montrer que tout espace métrique complet non vide et sans point isolé contient un sous-ensemble homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor.

Exercice 12 : *inégalité maximale sur* $\mathbb{R}$*, et un théorème de dérivation de Lebesgue.*

a. On suppose qu'un compact $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}$ est couvert par une famille d'intervalles ouverts $(\mathrm{I}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$; montrer qu'il existe une sous-famille finie $(\mathrm{I}_\beta)_{\beta\in\mathrm{B}}$ telle que chaque point de K appartienne à un ou à deux intervalles I_β, $\beta \in \mathrm{B}$.

Pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ on introduit la (grande) *fonction maximale* f^*, définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^*(x) = \sup_{\mathrm{J}\,:\,x\in\mathrm{J}} \frac{1}{|\mathrm{J}|}\int_{\mathrm{J}} |f(y)|\,\mathrm{d}y,$$

où J varie dans la famille des intervalles bornés contenant x.

b. Calculer f^* pour $f = \mathbf{1}_{(-1,1)}$. A-t-on toujours $f^* \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ quand $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$?

c. Soient $t > 0$ et K un compact contenu dans l'ensemble ouvert $\{f^* > t\}$; montrer que

$$t|\mathrm{K}| \leq 2 \int_{\{f^*>t\}} |f|.$$

Indication : pour tout point $x \in \mathrm{K}$, il existe un intervalle ouvert J contenant x tel que $\int_\mathrm{J} |f| > t|\mathrm{J}|$ et tel que $\mathrm{J} \subset \{f^* > t\}$. Appliquer *a.*

En déduire que pour tout $t > 0$, on a

$$\Big|\{x \in \mathbb{R} : f^*(x) > t\}\Big| \leq \frac{2}{t} \int_{\{f^*>t\}} |f(y)| \,\mathrm{d}y \leq \frac{2\|f\|_1}{t}.$$

d. Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$; montrer que

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(y) \,\mathrm{d}y$$

admet $f(x)$ pour dérivée, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.
Indication : approcher f dans L^1 par g continue, introduire G, primitive de g, et appliquer à $(f - g)^*$ l'inégalité de la question *c.*

e. Soit A un ensemble borélien de $\mathbb{R}$; montrer que presque tout point x de A est un *point de densité de* A, c'est-à-dire que

$$\lim_{h \to 0} \big|\mathrm{A} \cap [x - h, x + h]\big|/(2h) = 1.$$

Exercice 13. On définit un opérateur linéaire P sur $\mathrm{L}_2(0, 1)$ en posant pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_2(0, 1)$

$$\forall s \in (0, 1), \quad (\mathrm{P}f)(s) = \int_0^s f(t) \,\mathrm{d}t.$$

a. Vérifier que P est borné ; montrer que P est compact ; montrer que P est injectif.

b. Déterminer l'adjoint P^*. Diagonaliser $\mathrm{P}^*\mathrm{P}$.

Indication : si les fonctions f, g sont continues, les fonctions $\mathrm{P}f$ et P^*g sont dérivables ; montrer que les fonctions propres de $\mathrm{P}^*\mathrm{P}$ vérifient une équation différentielle, qu'on résoudra en tenant compte des diverses valeurs aux bornes.

Exercice 14. On rappelle que la fonction de Bessel J_0 peut être exprimée par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{J}_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

La fonction J_0 admet une infinité de zéros réels > 0 qui interviendront dans cet exercice, et qu'on notera $z_1 < \ldots < z_k < \ldots$.

a. Vérifier que $x\,\mathrm{J}_0''(x) + \mathrm{J}_0'(x) + x\,\mathrm{J}_0(x) = 0$ pour tout x ; chercher une autre solution $x \to y(x)$ sur $]0, z_1[$ de l'équation différentielle (de Bessel) $x\,y'' + y' + x\,y = 0$, en l'exprimant sous la forme $y(x) = u(x)\mathrm{J}_0(x)$; vérifier que $x\mathrm{J}_0(x)^2u'(x)$ est constante et en déduire que les solutions sur $]0, z_1[$ qui restent bornées au voisinage de 0 sont proportionnelles à J_0. Si y vérifie l'équation de Bessel et si μ est un réel > 0, quelle est l'équation vérifiée par la fonction z définie par $z(x) = y(\mu x)$?

b. On désigne par ν la mesure à densité $\mathrm{d}\nu(t) = t\,\mathrm{d}t$ sur l'intervalle $[0,1]$, et on définit un opérateur linéaire T sur l'espace réel $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2([0,1],\nu)$ en posant pour toute $f \in \mathrm{H}$

$$\forall s \in \,]0,1], \quad (\mathrm{T}f)(s) = \ln(s) \int_0^s f(t)\,t\,\mathrm{d}t + \int_s^1 \ln(t) f(t)\,t\,\mathrm{d}t.$$

Vérifier que T est borné, hermitien, compact ; montrer que $\mathrm{T}f$ se prolonge en fonction continue sur $[0,1]$.

c. Dans le cas où f est continue sur $[0,1]$, montrer que $\mathrm{F} = \mathrm{T}f$ est deux fois dérivable sur l'ouvert $]0,1[$ et y vérifie $(x\mathrm{F}'(x))' = xf(x)$. En déduire que toute fonction φ de classe C^2 à support dans l'ouvert $]0,1[$ est l'image par T de $f = (x\varphi'(x))'/x$, et que T est injectif ; montrer que $\int_0^1 (\mathrm{T}f)(x)f(x)\,x\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 (\mathrm{F}'(x))^2\,x\,\mathrm{d}x \leq 0$.

d. Diagonaliser T en montrant que les fonctions propres f doivent vérifier une certaine équation différentielle, avec les conditions au bord $f(1) = 0$ et f bornée au voisinage du point 0 (on devra considérer l'équation satisfaite par $x \to f(x/\mu)$, $\mu > 0$ bien choisi).

Exercice 15.

a. Dans un espace de Banach E on considère une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de vecteurs telle que $\lim_n x_n = 0_\mathrm{E}$. On désigne par F l'adhérence de l'enveloppe convexe de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$. Démontrer que F est compact.

b. On suppose maintenant que K est un compact de E, et on veut montrer qu'il existe un ensemble F, construit comme dans la question précédente, tel que $\mathrm{K} \subset \mathrm{F}$.

Indication. On montrera d'abord le fait suivant : supposons que $\mathrm{K} \subset \mathrm{B}(0_\mathrm{E}, 1)$; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fini $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}(0_\mathrm{E}, (1-\varepsilon)^{-1})$ et un compact $\mathrm{K}_1 \subset \mathrm{B}(0_\mathrm{E}, \varepsilon)$ tels que K soit contenu dans l'enveloppe convexe de la réunion de A et de K_1. On pourra prendre un ensemble fini $\mathrm{C} \subset \mathrm{K}$ tel que la réunion des boules de rayon $\alpha < \varepsilon^2$ centrées aux points de C recouvre K, puis poser $\mathrm{A} = (1-\varepsilon)^{-1}\mathrm{C}$ et définir K_1 comme un multiple convenable de la réunion des translatés

$$\mathrm{K}_2 = \bigcup_{c \in \mathrm{C}} \Big(\big(\mathrm{K} \cap \overline{\mathrm{B}(c,\alpha)}\big) - c \Big).$$

Exercice 16. On désigne par K un sous-ensemble convexe compact non vide de l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ des suites *réelles* $x = (x_n)_{n\geq 0}$ de carré sommable, et on définit par récurrence

$$\lambda_0 = \max\{x_0 : x \in \mathrm{K}\},$$

$$\lambda_{n+1} = \max\{x_{n+1} : x \in \mathrm{K},\ x_0 = \lambda_0, \ldots, x_n = \lambda_n\}.$$

a. Montrer qu'il existe un point $y \in \mathrm{K}$ tel que $y_n = \lambda_n$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que y est un point extrémal de K.

b. Soit F un fermé de K tel que $y \notin \mathrm{F}$; montrer qu'il existe n et $\varepsilon > 0$ tels que F ne contienne aucun point f tel que

$$\forall j \in \{0, \ldots, n\}, \quad f_j > \lambda_j - \varepsilon.$$

Montrer que y n'appartient pas à l'adhérence de l'enveloppe convexe de F.

Indication : l'ensemble F est contenu dans la réunion des $n+1$ convexes compacts G_j formés des points x de K tels que $x_j \leq \lambda_j - \varepsilon$; exprimer chaque élément de conv(F) comme combinaison convexe de points des différents G_j, puis passer à l'adhérence.

c. On suppose donné un groupe G de bijections affines continues de K sur K, compact comme sous-ensemble de l'espace topologique $\mathrm{C}(\mathrm{K},\mathrm{K})$ des applications continues de K dans K ; on suppose qu'aucun sous-ensemble convexe fermé de K n'est invariant par tous les éléments de G (l'ensemble K est un convexe fermé *minimal invariant*).

Montrer que y appartient à l'orbite $\{gx_0 : g \in \mathrm{G}\}$ de tout élément x_0. Montrer que K est réduit à un point.
Indication : si $x_0 \neq x_1$, considérer l'orbite de $(x_0 + x_1)/2$.

d. On suppose donné un groupe compact G de bijections affines continues d'un convexe compact C non vide de $\ell^2(\mathbb{N})$; montrer qu'il existe un point $x_0 \in \mathrm{C}$ qui est fixe pour tous les éléments de G (cas particulier d'un *théorème de point fixe de Kakutani*).

Exercice 17. Trouver une fonction nulle part dérivable à *valeurs complexes* est légèrement plus facile que dans le cas de fonctions à valeurs réelles ; c'est l'objet de cet exercice. On considère une suite croissante de réels $b_k > 0$ telle que b_{k+1}/b_k tende vers l'infini en croissant. Vérifier que les deux quantités

$$\Bigl(\sum_{j<k} b_j\Bigr)/b_k \quad \text{et} \quad b_k \sum_{j>k} 1/b_j$$

tendent vers 0 avec k ; vérifier que pour tout y réel on a $\bigl|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}y} - 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} + 1\bigr| \leq y^2$.

On pose maintenant pour tout entier $j \geq 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_j(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi b_j x}}{b_j} \quad \text{puis} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi b_k x}}{b_k}.$$

Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}$. Si f est dérivable au point x, la quantité

$$\Delta_h(f) := \frac{f(x+2h) - f(x)}{2h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{2h}$$

doit tendre vers $f'(x) - f'(x) = 0$ quand h tend vers 0. Si $h_k = 1/b_k$, montrer que

$$\bigl|\Delta_{h_k}(f_k)\bigr| = 2,$$

puis montrer que

$$\Bigl|\sum_{j<k} \Delta_{h_k}(f_j)\Bigr| \leq \frac{\pi^2}{2} \Bigl(\sum_{j<k} b_j\Bigr)/b_k \quad \text{et} \quad \Bigl|\sum_{j>k} \Delta_{h_k}(f_j)\Bigr| \leq 2 b_k \sum_{j>k} 1/b_j.$$

Conclure que f n'est pas dérivable au point x. Après cet échauffement, montrer que

$$x \to \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi 4^k x}$$

est continue et nulle part dérivable.
Indication : prendre $h_k = 4^{-k}$ et refaire les calculs précédents avec soin ; noter que $\pi^2 < 10$ et $\Delta_{h_k}(f_j) = 0$ quand $j > k$.