Exercice 1. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite bornée de nombres réels ; on rappelle que

$$\limsup_n x_n = \lim_m \bigl(\sup_{n\geqslant m} x_n \bigr).$$

Montrer que $\limsup_n x_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de la suite (x_n) (le nombre réel y est *valeur d'adhérence* de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout m entier, il existe $n \geq m$ tel que $|y - x_n| < \varepsilon$).

Exercice 2. Si $(u_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est une famille d'éléments de $[0, +\infty]$, la notation $\sum_{i\in \mathrm{I}} u_i$ désigne la borne supérieure des sommes finies $\sum_{i\in \mathrm{J}} u_i$, pour J fini contenu dans I ; cette borne supérieure est un élément de $[0, +\infty]$, valeur $+\infty$ admise.

a. Si $(\mathrm{I}_\alpha)_{\alpha\in \mathrm{A}}$ est une partition de I, montrer que

$$\sum_{\alpha\in \mathrm{A}} \Bigl(\sum_{i\in \mathrm{I}_\alpha} u_i \Bigr) = \sum_{i\in \mathrm{I}} u_i.$$

b. Si I est dénombrable et si $(i_n)_{n\geqslant 0}$ est une énumération de I, montrer que

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{i_n}.$$

c. Si la somme $\sum_{i\in \mathrm{I}} u_i$ n'est pas égale à $+\infty$, montrer que le sous-ensemble I_0 de I formé des indices i tels que $u_i > 0$ est fini ou dénombrable.

Exercice 3. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts (qu'on peut même supposer deux à deux disjoints).

Exercice 4. Montrer que pour toute suite croissante de mesures positives (μ_n) sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$, la limite $\mathrm{A} \in \mathcal{A} \to \mu(\mathrm{A}) = \lim_n \mu_n(\mathrm{A})$ est une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Montrer que pour toute suite de mesures positives (ν_k) sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$, la formule

$$\mathrm{A} \in \mathcal{A} \to \nu(\mathrm{A}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \nu_k(\mathrm{A})$$

définit une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Exercice 5. On rappelle que la lim sup d'une suite de sous-ensembles (A_n) d'un ensemble Ω est définie par

$$\limsup_n \mathrm{A}_n = \bigcap_n \bigcup_{m\geqslant n} \mathrm{A}_m \subset \Omega.$$

Montrer qu'un ensemble $\mathrm{X} \subset \mathbb{R}$ est négligeable (pour la mesure de Lebesgue λ) si et seulement s'il existe une suite d'intervalles (I_n) telle que

$$\sum |\mathrm{I}_n| < +\infty \quad \text{et} \quad \mathrm{X} \subset \limsup_n \mathrm{I}_n$$

(on a noté $|\mathrm{I}|$ la longueur d'un intervalle I ; on rappelle qu'un sous-ensemble X de $\mathbb{R}$ est λ-négligeable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert V de $\mathbb{R}$ contenant X et tel que $\lambda(\mathrm{V}) < \varepsilon$; on pourra comparer le résultat de cet exercice au lemme de Borel-Cantelli).

Indication. Utiliser l'exercice 3 ; ensuite, on pourra trouver une suite double d'intervalles $\mathrm{J}_{k,\ell}$ telle que $\mathrm{X} \subset \cup_\ell \mathrm{J}_{k,\ell}$ pour tout k, puis énumérer $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Exercice 6. Si f est une fonction mesurable ≥ 0, montrer que $\int f \, \mathrm{d}\mu = 0$ si et seulement si $\mu(\{f > 0\}) = 0$.
Montrer que si $\int f \, \mathrm{d}\mu < \infty$, alors $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$.

Exercice 7. Soit f une fonction mesurable sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (muni de sa tribu borélienne) ; on suppose que f est intégrable par rapport à une mesure positive μ sur (Ω, μ). Si on a $\int_{\mathrm{A}} f \, \mathrm{d}\mu \geq 0$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, montrer que f est ≥ 0 μ-presque partout.

Exercice 8. On suppose que μ est une mesure ≥ 0 sur un espace mesurable $(\mathrm{X}, \mathcal{A})$ et f une fonction $\mathcal{A}$-mesurable ≥ 0 sur X ; montrer que la formule

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \nu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} f \, \mathrm{d}\mu = \int \mathbf{1}_{\mathrm{A}} f \, \mathrm{d}\mu$$

définit une mesure positive ν sur $(\mathrm{X}, \mathcal{A})$.

Exercice 9. Calculer

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} \, \mathrm{d}x.$$

Exercice 10. Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt} \, \mathrm{d}x.$$

a. Montrer que $\widehat{f}$ est bornée, continue, et tend vers 0 à l'infini.

b. Montrer que si $\int_{\mathbb{R}} |x|^k |f(x)| \, dx < +\infty$, alors $\widehat{f}$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ (k est un entier ≥ 1).

c. Si μ est une mesure ≥ 0 finie sur $\mathbb{R}$, on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt} \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Généraliser les résultats de continuité et dérivabilité.

Exercice 11. Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, positive, paire avec $\widehat{f}$ de classe C^2, alors

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) \, \mathrm{d}x < +\infty$$

(c'est une sorte de réciproque de la question *b.* de l'exercice précédent, pour $k = 2$).

Exercice 12. Montrer que

$$\int_{-2}^{2} \Bigl(1 - \frac{x^2}{4}\Bigr)^n \, \mathrm{d}x$$

tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Montrer que pour tout ε tel que $0 < \varepsilon \leq 2$ on a

$$\lim_n \sqrt{n} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Bigl(1 - \frac{x^2}{4}\Bigr)^n \, \mathrm{d}x = 2\sqrt{\pi}.$$

Exercice 13. Montrer qu'il existe un nombre L tel que pour tout $\delta \in]0, \pi]$, on ait

$$\lim_n \sqrt{n} \int_{-\delta}^{\delta} \Big(\frac{1 + \cos x}{2} \Big)^n \, \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = \mathrm{L}.$$

Exercice 14. On suppose que f est une fonction réelle dérivable en tout point de $\mathbb{R}$, et que sa dérivée f' est bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tous $a < b$, on a

$$\int_a^b f'(t) \, \mathrm{d}t = f(b) - f(a).$$

Étendre le résultat au cas d'une fonction f, lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et admettant une dérivée $f'(x)$ pour presque tout x.

Exercice 15. Si f est une fonction Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$, montrer que la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-|x-t|} \, f(t) \, \mathrm{d}t$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16. Si f est une fonction continue et Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$, montrer que la fonction F définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(x) = \int_0^1 f(x - t) \sin(t) \, \mathrm{d}t$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17. Si (f_n) est une suite de fonctions réelles $\mathcal{A}$-mesurables définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$, montrer que l'ensemble A des points $\omega \in \Omega$ où la limite $\lim_n f_n(\omega)$ existe est un ensemble de la tribu $\mathcal{A}$.

Exercice 18.

Si $\int |g_k| \, \mathrm{d}\mu \leq 2^{-k}$ pour tout entier $k \geq 0$, montrer que la suite $(g_k(\omega))$ tend vers 0 pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$.

Si $(f_n) \subset \mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ tend vers f en norme L^p, trouver une sous-suite (f_{n_j}) qui tend vers f μ-presque partout.

Exercice 19. Montrer que pour tout borélien A de $[0, 1]$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{A}$ tel que $\lambda(\mathrm{A} \setminus \mathrm{K}) < \varepsilon$ (on note λ la mesure de Lebesgue).
Indication. Montrer que la famille des sous-ensembles B de $[0, 1]$ qui ont la propriété suivante : *pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un compact* K_ε *et un ouvert* V_ε *tels que* $\mathrm{K}_\varepsilon \subset \mathrm{B} \subset \mathrm{V}_\varepsilon$ *et* $\lambda(\mathrm{V}_\varepsilon \setminus \mathrm{K}_\varepsilon) < \varepsilon$, est une tribu de parties de $[0, 1]$ qui contient les intervalles.

Exercice 20 : théorèmes d'Egorov et de Lusin. On suppose que μ est une mesure ≥ 0 finie sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

a. Si la suite (f_n) de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables tend simplement vers 0 sur Ω, trouver pour tout $k \geq 0$ un entier n_k tel que $\mu\{|f_{n_k}| > 2^{-k}\} \leq 2^{-k}$.

b. Montrer que pour tout entier k_0, la sous-suite $(f_{n_j})_j$ trouvée en a tend uniformément vers 0 sur l'ensemble

$$\mathrm{A}(k_0) = \bigcap_{k \geqslant k_0} \{|f_{n_k}| \leq 2^{-k}\}$$

et que cet ensemble $\mathrm{A}(k_0)$ a une mesure qui tend vers $\mu(\Omega)$ lorsque $k_0 \to +\infty$.

c. Théorème de Lusin. Montrer que pour toute fonction f borélienne sur $[0,1]$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un compact $\mathrm{K}_\varepsilon \subset [0,1]$ tel que $\lambda([0,1] \setminus \mathrm{K}_\varepsilon) < \varepsilon$ et tel que la restriction de f à K_ε soit continue.

Exercice 21 : *formule d'Euler-MacLaurin*. On considère la suite de polynômes (P_n) définie par

$$\mathrm{P}_0 = 1, \quad \text{et} \quad \mathrm{P}'_{n+1} = -\mathrm{P}_n, \quad \int_0^1 \mathrm{P}_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

pour tout entier $n \geq 0$. Déterminer P_1 et P_2 ; vérifier que $\mathrm{B}_n = (-1)^n n!\,\mathrm{P}_n$ est unitaire de degré n (*polynôme de Bernoulli*). Vérifier que $\mathrm{P}_k(1) = \mathrm{P}_k(0)$ pour tout $k \geq 2$.

a. Si f est de classe C^{n+1} sur $[0,1]$ et $n \geq 1$, montrer que

$$\begin{aligned} f(1) - f(0) = {} & \frac{f'(0) + f'(1)}{2} - \sum_{2 \leq k \leq n} \mathrm{P}_k(0)\big(f^{(k)}(1) - f^{(k)}(0)\big) \\ & + \int_0^1 \mathrm{P}_n(t) f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{1}$$

b. En appliquant la formule (1) à la fonction $x \to \mathrm{e}^{\lambda x}$, montrer que le DL au voisinage de $\lambda = 0$ de la fonction $\lambda \to \lambda/(1 - \mathrm{e}^{-\lambda})$ est donné à tout ordre n par

$$\frac{\lambda}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}} = \frac{\lambda\,\mathrm{e}^\lambda}{\mathrm{e}^\lambda - 1} = \sum_{k=0}^n \mathrm{P}_k(0)\lambda^k + \mathrm{O}(\lambda^{n+1}).$$

Montrer que la fonction $\lambda \to \lambda/(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}) - \lambda/2$ est paire. En déduire que $\mathrm{P}_{2k+1}(0) = 0$ pour tout entier $k \geq 1$.

c. Récrire la formule (1) avec les polynômes de Bernoulli B_n et les nombres de Bernoulli $b_n = \mathrm{B}_n(0)$, en tenant compte de la remarque précédente.

d. Désignons par B^*_n la fonction 1-périodique sur $\mathbb{R}$ qui est égale à $x \to \mathrm{B}_n(x)$ quand $0 \leq x < 1$. Si f est de classe C^{2n+1} sur l'intervalle $[p,q]$, avec $p < q$ entiers et $n \geq 1$, montrer que

$$\begin{aligned} f(q) - f(p) = {} & \frac{f'(p)}{2} + f'(p+1) + \cdots + f'(q-1) + \frac{f'(q)}{2} \\ & - \sum_{k=1}^n \frac{b_{2k}}{(2k)!}\big(f^{(2k)}(q) - f^{(2k)}(p)\big) + \int_p^q \frac{\mathrm{B}^*_{2n}(t)}{(2n)!} f^{(2n+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Exercice 22 : construction de la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.
Si I est un intervalle contenu dans $[0,1]$, on note $\ell(\mathrm{I})$ sa longueur ; on dira qu'un ensemble $\mathrm{B} \subset [0,1]$ est *simple* si c'est une réunion finie d'intervalles disjoints, et dans ce cas la mesure $\ell(\mathrm{B})$ de cet ensemble est la somme des longueurs de ces intervalles. Si X est un sous-ensemble de $[0,1]$, la *mesure extérieure de* X, notée $\lambda^*(\mathrm{X})$, est la borne inférieure des nombres m tels qu'il existe une famille finie ou dénombrable d'intervalles ouverts $(\mathrm{I}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ telle que

$$\mathrm{X} \subset \bigcup_{\alpha\in\mathrm{A}} \mathrm{I}_\alpha \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \ell(\mathrm{I}_\alpha) < m.$$

a. Montrer que $\lambda^*(\mathrm{B}) = \ell(\mathrm{B})$ quand B est simple ; pour montrer que $\ell(\mathrm{B}) \le \lambda^*(\mathrm{B})$, on commencera par le cas où B est fermé, donc compact (penser à Borel-Lebesgue).

b. Montrer que

$$\lambda^*\big(\bigcup_{\alpha\in\mathrm{A}} \mathrm{X}_\alpha\big) \le \sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \lambda^*(\mathrm{X}_\alpha)$$

pour toute famille finie ou dénombrable $(\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ de sous-ensembles de $[0,1]$.

c. Si X, Y sont deux sous-ensembles de $[0,1]$, on introduit leur *différence symétrique*

$$\mathrm{X} \triangle \mathrm{Y} = (\mathrm{X}\setminus\mathrm{Y}) \cup (\mathrm{Y}\setminus\mathrm{X})\,;$$

montrer que $\mathbf{1}_{\mathrm{X}\triangle\mathrm{Y}} = \big|\mathbf{1}_\mathrm{X} - \mathbf{1}_\mathrm{Y}\big|$; montrer que si Z est un troisième sous-ensemble de $[0,1]$, on a

$$\mathrm{X}\triangle\mathrm{Z} \subset (\mathrm{X}\setminus\mathrm{Y}) \cup (\mathrm{Y}\setminus\mathrm{Z}) \quad \text{et} \quad \lambda^*(\mathrm{X}\triangle\mathrm{Z}) \le \lambda^*(\mathrm{X}\setminus\mathrm{Y}) + \lambda^*(\mathrm{Y}\setminus\mathrm{Z}).$$

Montrer que $|\lambda^*(\mathrm{X}) - \lambda^*(\mathrm{Y})| \le \lambda^*(\mathrm{X}\triangle\mathrm{Y})$.

On dira qu'une suite (B_n) d'ensembles simples contenus dans $[0,1]$ *tend en mesure* vers un ensemble $\mathrm{X} \subset [0,1]$ si la mesure extérieure de la différence symétrique $\mathrm{X}\triangle\mathrm{B}_n$ tend vers 0.

d. Montrer que dans ce cas, la suite $\ell(\mathrm{B}_n)$ tend vers une limite, et que cette limite ne dépend pas de la suite (B_n) particulière : on la notera $\lambda(\mathrm{X})$.

On désigne par $\mathcal{M}$ la collection $\mathcal{M}$ des sous-ensembles X de $[0,1]$ qui sont limite en mesure d'une suite (B_n) d'ensembles simples.

e. Vérifier que $\mathcal{M}$ est stable par passage au complémentaire ; si (B_n) tend en mesure vers X et (C_n) vers Y, et si X et Y sont disjoints, montrer que $\ell(\mathrm{B}_n \cap \mathrm{C}_n)$ tend vers 0. Montrer que $\lambda^*(\mathrm{X}) = \lambda(\mathrm{X})$ quand $\mathrm{X}\in\mathcal{M}$.

En déduire que $\mathcal{M}$ est une tribu, et que λ est une mesure sur $\mathcal{M}$ qui prolonge ℓ.

Exercice 23. Démontrer le théorème dit *de Mertens* : si $\sum |a_n| < +\infty$ et si la série $\sum b_n$ est convergente (simplement), alors la *série produit* $\sum c_n$ dont le terme général est

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$$

est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\Big).$$

(*Indication.* Exprimer les sommes partielles de la série produit au moyen des a_j et des sommes partielles de la série $\sum b_n$; appliquer une version facile du théorème de convergence dominée, celle du cas de la mesure de comptage).

Montrer que le théorème ne subsiste pas si on suppose seulement que les deux séries sont simplement convergentes.