Exercice 1. On suppose que f est une fonction réelle croissante sur $\mathbb{R}$, et dérivable en presque tout point de $\mathbb{R}$ (pour la mesure de Lebesgue). Montrer que f' est une fonction Lebesgue-mesurable (définie presque partout) ; montrer que pour tous $a < b$, on a

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t \le f(b) - f(a)$$

(on pourra se contenter du cas un peu plus simple où f est aussi continue).

Remarque : d'après un théorème de Lebesgue, toute fonction croissante sur $\mathbb{R}$ est dérivable presque partout : l'hypothèse de dérivabilité donnée dans l'exercice est en fait automatiquement satisfaite.

Exercice 2.

a. On définit une suite (F_n) de sous-ensembles de $[0,1]$ de la façon suivante : on pose $\mathrm{F}_0 = [0,1]$; si F_n est défini, $n \ge 0$, on pose

$$\mathrm{F}_{n+1} = \{x/3 : x \in \mathrm{F}_n\} \cup \{x/3 + 2/3 : x \in \mathrm{F}_n\}.$$

Vérifier que F_n est fermé. Montrer que la suite (F_n) est décroissante. Calculer la mesure de F_{n+1} à partir de celle de F_n.

b. On considère l'ensemble

$$\Delta = \bigcap_n \mathrm{F}_n.$$

Montrer que Δ est un fermé de mesure nulle. Montrer que Δ contient tous les points x de la forme

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n 3^{-n},$$

où $c_n \in \{0, 2\}$ pour tout n, et que Δ est par conséquent non dénombrable (l'ensemble Δ est *l'ensemble triadique de Cantor*).

c. On considère une fonction f_0 continue sur $[0,1]$, telle que $f_0(0) = 0$, $f_0(1) = 1$ et $0 \le f_0 \le 1$. On définit par récurrence une suite (f_n) de fonctions sur $[0,1]$ par

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \frac{1}{2} f_n(3x) \quad \text{si } \ 0 \le x < 1/3 \\ &= \frac{1}{2} \quad \text{si } \ 1/3 \le x < 2/3 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(3x-2) \quad \text{si } \ 2/3 \le x \le 1. \end{aligned}$$

Montrer que f_n est continue pour tout $n \ge 1$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction continue croissante f. Montrer que f est dérivable en presque tout point de $[0,1]$, et que $f' = 0$ presque partout, mais $f(1) = 1 \ne f(0) = 0$ (cette fonction f est la *fonction de Cantor*).

Indication : en tout point $x \notin \Delta$, on a $f'(x) = 0$ (remarquer que $f = f_n$ en dehors de l'ensemble F_n, et que f_n est constante au voisinage de chaque point $x \notin \mathrm{F}_n$).

Exercice 3. Soient f une fonction Lebesgue-intégrable sur $[0,+\infty[$ et g une fonction mesurable bornée sur $[0,+\infty[$, telle que l'intégrale $\int_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ soit convergente (simplement) ; on pose pour tout $x \ge 0$

$$(f*g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que l'intégrale $\int_0^\infty (f*g)(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente, et que

$$\int_0^{+\infty} (f*g)(x)\,\mathrm{d}x = \Bigl(\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\Bigr)\Bigl(\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x\Bigr).$$

Exprimer le résultat précédent dans le cas où les fonctions f et g sont constantes sur tous les intervalles $[k,k+1[$, $k \ge 0$:

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathbf{1}_{[k,k+1[}, \quad g = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \mathbf{1}_{[k,k+1[}.$$

Indication : on calculera $(f*g)(k)$ pour tout entier $k \ge 0$, et on observera que $f*g$ est affine sur chaque intervalle $[k,k+1]$.

Exercice 4. On munit $\mathbb{R}^d$ de la norme euclidienne $x \to \|x\|$, et on désigne par v_d le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$ pour la mesure de Lebesgue. Si f est une fonction borélienne ≥ 0 sur $[0,+\infty[$, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\|x\|)\,\mathrm{d}x = d\,v_d \int_0^{+\infty} f(r) r^{d-1}\,\mathrm{d}r.$$

Indication. On pourra « calculer » la mesure image de la mesure de Lebesgue par l'application $x \to \|x\|$.

Calculer v_d en utilisant $f(r) = \mathrm{e}^{-r^2/2}$ dans la formule précédente (et la fonction Γ).

Exercice 5. Si f est une fonction mesurable ≥ 0 et p un nombre réel ≥ 1, montrer que

$$\int_\Omega f^p\,\mathrm{d}\mu = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \mu(\{f > t\})\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 6. Si f et g sont intégrables sur $\mathbb{R}$ posons

$$\mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{G}(x) = \int_{-\infty}^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que pour tous $a < b$ réels on a

$$\int_a^b \mathrm{F}(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \bigl[\mathrm{F}\,\mathrm{G}\bigr]_a^b - \int_a^b f(t)\mathrm{G}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 7. On donne une fonction mesurable $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, intégrable sur tout intervalle borné, mais telle que

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

On introduit la fonction F, définie sur $\mathbb{R}$ par la donnée de $\mathrm{F}(0)$ et par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

(qu'il faut comprendre comme $\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) - \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[x,0]}(t) f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x < 0$; quand la fonction f est continue, f est la dérivée de F, mais on ne suppose pas ici que f soit continue). Montrer que pour toute fonction borélienne $g \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, on a la formule « de changement de variable »

$$\int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} g(\mathrm{F}(x)) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Indication. On définira une mesure μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ par la formule

$$\forall \mathrm{B} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \quad \mu(\mathrm{B}) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\mathrm{B}}(\mathrm{F}(x)) f(x)\,\mathrm{d}x,$$

et on donnera une formule pour l'intégrale de g par rapport à μ ; de plus, pour tous $a < b$ on calculera $\mu([a,b])$.

Exercice 8. On désigne par α un paramètre réel, et pour chaque entier $n \geq 1$ on pose $u_n = (-1)^{[\sqrt{n}]}/n^{\alpha}$, où $[x]$ désigne la partie entière du réel x, c'est-à-dire l'entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leq x < k+1$. On se propose d'étudier la série numérique $\sum u_n$.

Pour chaque entier $k \geq 1$ on pose

$$\mathrm{S}_k = \sum_{k^2 \leqslant n < (k+1)^2} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

a. Vérifier que la série $\sum u_n$ converge lorsque $\alpha > 1$.

b. Vérifier que

$$\sum_{1 \leqslant n < (k+1)^2} u_n = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j\,\mathrm{S}_j.$$

c. On suppose ici que $\alpha \leq 1/2$. Montrer que $\mathrm{S}_k \geq 1$; conclure dans ce cas.

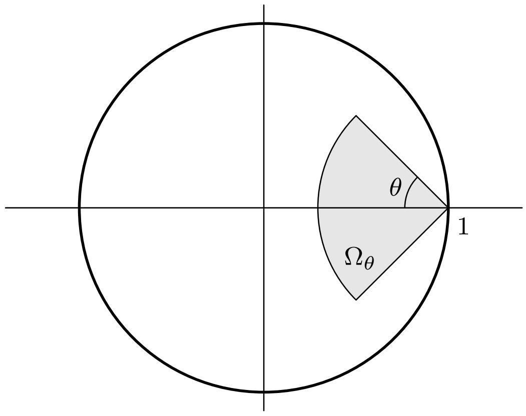
d. On suppose maintenant que $1/2 < \alpha$. Montrer que

$$\frac{2}{(k+1)^{2\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^{2\alpha}} \leq \mathrm{S}_k \leq \frac{2}{k^{2\alpha-1}} + \frac{1}{k^{2\alpha}}.$$

En déduire la convergence de la série $\sum(-1)^k\,\mathrm{S}_k$. En plaçant un entier $n \geq 1$ quelconque entre deux carrés successifs k^2 et $(k+1)^2$, conclure l'étude des sommes partielles $\sum_{j=1}^{n} u_j$ dans ce cas.

Exercice 9. Pour $0 < \theta < \pi/2$ on considère la partie de $\mathbb{C}$ définie par

$$\Omega_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(1-z)| < \theta,\ |1-z| < \cos\theta\}.$$



a. Montrer que Ω_θ est contenu dans le disque unité, et plus précisément

$$|z|^2 < 1 - |1-z|\cos\theta$$

pour tout $z \in \Omega_\theta$.

b. On suppose que $\sum a_n$ est une série convergente à termes complexes, et on pose pour $|z| < 1$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad \mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Évaluer $f(z) - \mathrm{S}$ en introduisant les restes $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$ (transformation d'Abel). Borner la quantité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |z^n - z^{n+1}|$$

lorsque $z \in \Omega_\theta$ et en déduire que $f(z)$ tend vers S quand z tend vers 1 par valeurs dans le domaine Ω_θ.

c. Si les séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ sont convergentes ainsi que la série produit $\sum c_n$, montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\Big).$$

Exercice 10. Soit φ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$; montrer que la fonction

$$x \to \frac{\varphi(x)}{x^2}$$

convenablement prolongée en 0, est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Indication : écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, et transformer l'expression du reste intégral.

Exercice 11 : variante du théorème d'analyticité de Bernstein.

a. Soit f une fonction concave positive de classe C^2 sur l'intervalle $[-1,1]$, telle que f'' soit convexe ; montrer que

$$|f'(0)| \le f(0)\,; \qquad |f''(0)| \le 3\,f(0).$$

Indication : pour la deuxième inégalité, on utilisera la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre deux entre les points 0 et 1, et entre -1 et 0, avec une majoration sur $[0,1]$ (et une autre sur $[-1,0]$) de la fonction convexe (négative) f'' par une fonction affine.

b. Quelles inégalités obtient-on si on remplace $[-1,1]$ par un intervalle $[-h,h]$?

c. Si f est positive, de classe C^∞ sur $[-a-h,a+h]$, et si $(-1)^k f^{(2k)} \ge 0$ sur $[-a-h,a+h]$ pour tout entier $k \ge 1$, montrer qu'il existe une constante C (dépendant de h) telle que

$$\forall n \ge 1, \quad \sup_{|x|\le a} |f^{(n)}(x)| \le \mathrm{C}^n \sup_{|x|\le a} |f(x)|.$$

d. En déduire que si f est de classe C^∞ sur un intervalle ouvert I, et si $(-1)^k f^{(2k)} \ge 0$ sur I pour tout entier $k \ge 0$, alors f est analytique sur I ; plus précisément, montrer que si $\mathrm{I} =]x_0 - r, x_0 + r[$ pour un $r > 0$, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n$$

pour tout $x \in \mathrm{I}$ (variante d'un théorème de Bernstein).

Exercice 12. Algorithme de Borel : on donne une suite $(\mathrm{I}_n)_{n\ge 0}$ d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ qui couvrent $[0,1]$. On pose $x_0 = 0$ et on désigne par n_0 le premier entier tel que $x_0 \in \mathrm{I}_{n_0}$; si x_k, n_k sont définis, on désigne par x_{k+1} l'extrémité de I_{n_k} et dans le cas $x_{k+1} \le 1$, on désigne par n_{k+1} le premier entier n tel que I_n contienne x_{k+1}. Montrer qu'il existe un entier k tel que $[0,1]$ soit la réunion de $\mathrm{I}_0, \ldots, \mathrm{I}_{n_k}$.