Exercice 1. Montrer que pour tout x tel que $0 < x < 2\pi$, on a

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}\cdot$$

Exercice 2. Si deux fonctions $f, g \in \mathrm{L}^1(0, 2\pi)$ sont égales dans un intervalle non vide $]s-\varepsilon, s+\varepsilon[$, montrer que $\lim_n \big((\mathrm{S}_n f)(s) - (\mathrm{S}_n g)(s)\big) = 0$ (principe de localisation).

Exercice 3. On donne un paramètre réel ou complexe $a \notin \mathbb{Z}$, et on désigne par f_a l'unique fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ qui vérifie

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \quad f_a(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, ax}\,.$$

Expliciter le résultat obtenu en appliquant le théorème de convergence de Dirichlet à la fonction f_a au point $x = \pi$.

Exercice 4. Pour tout entier $n \ge 1$ on définit le polynôme trigonométrique p_n de degré $n-1$ par

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, kx} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, nx} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, x} - 1}\cdot$$

a. On pose $\mathrm{P}_n = \overline{p_n} p_n$; vérifier que P_n est un polynôme trigonométrique de degré $< n$, à valeurs réelles ≥ 0, et calculer ses coefficients.

b. On pose $\mathrm{Q}_n = \mathrm{P}_n^2$. Vérifier que Q_n est une fonction réelle ≥ 0, et un polynôme trigonométrique de degré $< 2n$. Montrer que

$$\mathrm{I}_n := \int_0^{2\pi} \mathrm{Q}_n(t)\, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - n^2 = \frac{2n^3 + n}{3}\cdot$$

c. On pose $\mathrm{J}_n = \mathrm{I}_n^{-1} \mathrm{Q}_n$; montrer que pour tout t tel que $|t| \le \pi$, on a

$$\mathrm{J}_n(t) \le \frac{3\pi^4}{2n^3 t^4}\cdot$$

d. À chaque fonction f continue et 2π-périodique on associe la suite de fonctions (f_n), obtenue par *convolution périodique* de f avec les (J_n), et qui est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t)\, \mathrm{J}_n(t)\, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi}\cdot$$

Montrer que f_n est un polynôme trigonométrique de degré $< 2n$. Montrer que

$$(*) \qquad \|f - f_n\|_\infty \le 2\, \omega_f\Big(\frac{\pi}{n}\Big),$$

où

$$\delta > 0 \to \omega_f(\delta) = \max\big\{|f(y) - f(x)| : |y - x| \le \delta\big\}$$

est le module de continuité ω_f de f. L'inégalité $(*)$ est une version d'un théorème d'approximation de Dunham JACKSON, mathématicien américain, 1888–1946.

Indication : pour majorer l'intégrale

$$f_n(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \bigl(f(x-t) - f(x)\bigr) \mathrm{J}_n(t) \, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi},$$

on montrera la majoration

$$\bigl|f(x-t) - f(x)\bigr| \le \Bigl(\bigl[|t|/\delta\bigr] + 1\Bigr) \omega_f(\delta),$$

où $\bigl[|t|/\delta\bigr]$ désigne la partie entière de $|t|/\delta$ (qui est nulle quand $|t| < \delta$).

Exercice 5 : convergence uniforme des séries de Fourier.

a. Montrer que pour tout entier $n \ge 0$, le noyau de Dirichlet D_n vérifie

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\mathrm{D}_n(t)| \, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(nt + t/2)|}{\sin(t/2)} \, \mathrm{d}t \le 1 + \ln(2n+1).$$

Indication : découper l'intervalle en $[0, \varepsilon]$ et $[\varepsilon, \pi]$, pour un ε bien choisi.

b. Déduire de l'exercice précédent le résultat suivant : *si f est une fonction continue et 2π-périodique telle que $\lim_n \bigl(\ln(n) \, \omega_f(1/n)\bigr) = 0$, alors la suite des fonctions $(\mathrm{S}_n f)$ converge uniformément vers f.*

Indication : on approche f par le polynôme trigonométrique f_n de l'exercice précédent ; on remarque que $\mathrm{S}_{2n} f = f * \mathrm{D}_{2n}$ et $f_n = f_n * \mathrm{D}_{2n}$ (convolutions périodiques).

Exercice 6 : une application géométrique.

a. Calculer les coefficients de Fourier complexes de la fonction 2π-périodique g qui est égale à $\mathbf{1}_{[0,\pi]} - \mathbf{1}_{[-\pi,0]}$ sur $[-\pi, \pi[$.

b. On considère le sous-ensemble borné A de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\mathrm{A} = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le r \le f(\theta), \ 0 \le \theta \le 2\pi\},$$

où f est une fonction continue 2π-périodique > 0. Si $0 < \beta - \alpha \le 2\pi$, exprimer par une intégrale de la forme $\int_\alpha^\beta k(\theta) \, \mathrm{d}\theta$ la surface de la partie de A correspondant aux points $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ tels que $0 \le r \le f(\theta)$ et $\alpha \le \theta \le \beta$.

c. On suppose maintenant que A possède la propriété suivante : toute droite passant par le point 0 découpe A en deux parties de même surface. Exprimer les coefficients de Fourier de la convolution périodique $k * g$ et évaluer $k * g$. Montrer que l'ensemble A est symétrique par rapport à l'origine (autrement dit, la fonction f vérifie $f(\theta) = f(\theta + \pi)$).

Exercice 7. En utilisant une série de Fourier ou une autre, montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 8. Déterminer les racines du polynôme

$$\mathrm{P}_{n-1} = \frac{1}{n}\big(\mathrm{X}^n - (\mathrm{X}-1)^n\big) = \mathrm{X}^{n-1} - \frac{n-1}{2}\,\mathrm{X}^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{6}\,\mathrm{X}^{n-3} + \cdots$$

puis calculer la somme $\sigma_2(n)$ des carrés des racines grâce aux relations entre coefficients et racines. Que trouve-t-on quand $n \to +\infty$, en comparant les deux expressions trouvées pour $n^{-2}\sigma_2(n)$?

Exercice 9. Si une fonction f continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ vérifie une condition de Hölder d'ordre $\alpha > 1/2$, c'est-à-dire qu'il existe un nombre M tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \le \mathrm{M}\,|x-y|^\alpha,$$

montrer que ses coefficients de Fourier sont absolument sommables.
Indication : considérer pour t fixé dans $(0, 2\pi)$ la fonction $g_t(x) = (f(x-t) - f(x))/t^\alpha$; lui appliquer Parseval, puis intégrer par rapport à $\mathrm{d}t/t^\beta$ le résultat obtenu, avec $0 < \beta < 1$. En déduire d'abord que $\sum |n|^{2\alpha-\varepsilon}\,|c_n(f)|^2 < +\infty$, pour tout $\varepsilon > 0$.

Exercice 10. On suppose que f est une fonction entière, définie sur $\mathbb{C}$ par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,$$

et qu'il existe un réel $\mathrm{K} \ge 0$ et une constante M tels que f admette la majoration

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \big|\mathrm{Re}\, f(z)\big| \le \mathrm{M}\big(1 + |z|^{\mathrm{K}}\big).$$

En déduire que f est un polynôme de degré $\le \mathrm{K}$ (variante du *théorème de Liouville*).
Indication : considérer pour tout $r > 0$ la fonction périodique $g_r(\theta) = \mathrm{Re}\, f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$, de carré intégrable sur chaque période.

Exercice 11 : la base de Haar pour $\mathrm{L}^2(0,1)$. On définit la fonction φ sur $\mathbb{R}$ en posant $\varphi(x) = 1$ si $x \in [0, 1/2[$, $\varphi(x) = -1$ si $x \in [1/2, 1[$, et φ nulle ailleurs sur $\mathbb{R}$. Pour $n \ge 0$ et $j = 0, \ldots, 2^n - 1$, on pose

$$\forall x \in [0, 1[, \quad h_{n,j}(x) = 2^{n/2}\varphi(2^n x - j).$$

Montrer que la famille de fonctions formée de $\mathbf{1}$ et de toutes les fonctions $h_{n,j}$, $n \ge 0$ et $j = 0, \ldots, 2^n - 1$, est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(0,1)$.

Exercice 12 : déterminants de Gram. Soient $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ des vecteurs d'un espace de Hilbert, tels que $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ soit de dimension n ; montrer que la distance de x_{n+1} au sous-espace F est donnée par la formule

$$\mathrm{dist}^2(x_{n+1}, \mathrm{F}) = \frac{\det\big(\langle x_i, x_j\rangle\big)_{i,j=1,\ldots,n+1}}{\det\big(\langle x_i, x_j\rangle\big)_{i,j=1,\ldots,n}}\,.$$

Exercice 13. On définit une fonction φ sur $\mathbb{R}$ en posant $\varphi(x) = 1$ sur $[2k, 2k+1[$, $k \in \mathbb{Z}$ et $\varphi(x) = -1$ sinon ; on pose ensuite pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $x \in [0, 1[$

$$\varepsilon_n(x) = \varphi(2^n x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \big(\mathbf{1}_{[2k,2k+1[} - \mathbf{1}_{[2k+1,2k+2[}\big)(2^n x).$$

a. Montrer que si $0 \leq m < n$ et $0 \leq k < 2^m$, on a

$$\int_{k2^{-m}}^{(k+1)2^{-m}} \varepsilon_n(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

En déduire que pour tous $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_p$, on a

$$\int_0^1 \Big(\prod_{j=1}^{p} \varepsilon_{n_j}(t)\Big)\,\mathrm{d}t = 0.$$

b. Pour tout ensemble fini $\mathrm{A} \subset \mathrm{N}^*$, on pose

$$\forall x \in [0, 1[, \quad w_{\mathrm{A}}(x) = \prod_{j \in \mathrm{A}} \varepsilon_j(x)$$

(sans oublier l'ensemble vide, pour lequel $w_\emptyset = \mathbf{1}$). Montrer que la famille de toutes les fonctions (w_{A}) est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(0, 1)$ (base de Walsh).

Exercice 14.
a. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

est (simplement) convergente.
b. Montrer qu'il existe une constante C_1 telle que pour $0 \leq t \leq \pi$ et u réel, on ait

$$\Big|\int_0^t \frac{\sin(ux)}{\sin(x/2)}\,\mathrm{d}x - \int_0^t \frac{\sin(ux)}{x/2}\,\mathrm{d}x\Big| \leq \mathrm{C}_1.$$

En déduire que les sommes de Fourier symétriques $(\mathrm{S}_n\chi)$ des fonctions χ indicatrices d'intervalles $[a, b]$, $-\pi \leq a \leq b \leq \pi$, sont uniformément bornées par une constante C_2 indépendante de l'intervalle.
c. Soit f une fonction 2π-périodique intégrable sur $[-\pi, \pi]$ telle que $c_0(f) = 0$ et posons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\,;$$

montrer que F est 2π-périodique. Montrer que les sommes $\sum_{k=-n}^{n} c_k(\mathrm{F})$ sont bornées par $\mathrm{C}_2 \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t$.
d. Montrer que la série trigonométrique

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\ln n}$$

converge pour tout x, mais qu'il n'existe pas de fonction 2π-périodique impaire f, intégrable sur chaque période telle que $b_n(f) = 1/\ln n$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 15. *Dans cet exercice, on ne suppose pas connue la théorie des séries de Fourier ; au contraire, il s'agit de proposer une preuve un peu différente pour la densité des polynômes trigonométriques. L'étudiant attentif pourra y voir une variante d'une démonstration courante du théorème de Dirichlet (qui lui aussi, implique la densité des polynômes trigonométriques).*

a. On désigne par X l'espace vectoriel des fonctions 2π-périodiques de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes. Montrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathrm{X}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\varphi)$ converge absolument ; on peut donc poser

$$\ell(\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\varphi)\,;$$

vérifier que ℓ est linéaire sur X.

b. Si $\psi \in \mathrm{X}$ et si on définit φ par $\varphi(x) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - 1)\,\psi(x)$, montrer que $\ell(\varphi) = 0$.

c. Si φ est 2π-périodique de classe C^3, montrer que la fonction ψ définie pour $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ par

$$\varphi(x) = \varphi(0) + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - 1)\,\psi(x)$$

se prolonge en un élément $\psi \in \mathrm{X}$.

d. Si φ est 2π-périodique de classe C^3, montrer que

$$\varphi(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\varphi), \quad \text{puis} \quad \varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\varphi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que l'espace des polynômes trigonométriques est dense dans l'espace des fonctions continues 2π-périodiques muni de la norme uniforme.

Exercice 16 : contre-exemple de Fejér. Pour chaque entier $k \geq 1$ définissons une fonction f_k continue, paire et 2π-périodique en posant

$$f_k(x) = \bigl|\sin(kx + x/2)\bigr|$$

lorsque $|x| \leq \pi$. Montrer que si $\ell \neq k$,

$$(\mathrm{S}_\ell f_k)(0) = (\mathrm{S}_k f_\ell)(0).$$

Si $2k \leq \ell$, montrer que pour $n \leq k$ on a

$$|c_n(f_\ell)| \leq \frac{4}{(2k+1)\pi} \quad \text{donc} \quad |(\mathrm{S}_k f_\ell)(0)| \leq \frac{4}{\pi}\cdot$$

Montrer qu'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que $(\mathrm{S}_\ell f_\ell)(0) \geq \kappa \ln \ell$ pour tout $\ell \geq 1$, et conclure que $(\mathrm{S}_n f)(0)$ ne converge pas pour la fonction f continue de *l'exemple de Fejér*

$$f = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{f_{2p^3}}{p^2}\,.$$