Exercice 1. On considère une fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, nulle hors de $[-\pi, \pi]$; on considère aussi la fonction 2π-périodique g_a définie sur $\mathbb{R}$ par $g_a(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax}$ quand $\pi \leq x < \pi$, où a est un paramètre réel. En utilisant la série de Fourier de g_a, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n+a)|^2.$$

En déduire que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(t)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

Si on suppose de plus que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, à support dans $[-\pi, \pi]$, modifier la méthode précédente pour retrouver la formule d'inversion de Fourier.

Exercice 2 : *formule de Poisson.* Soit G une fonction paire positive sur $\mathbb{R}$, décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et telle que $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{G}(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$; soit F une fonction continue sur $\mathbb{R}$, telle que $|\mathrm{F}(x)| \leq \mathrm{G}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{F}(x + 2\pi n)$ est 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Trouver une relation entre les valeurs $\widehat{\mathrm{F}}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ et les coefficients de Fourier de f.

c. On suppose de plus que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{\mathrm{F}}(n)| < +\infty$. Démontrer la *formule de Poisson*,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{F}(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathrm{F}}(n).$$

d. Expliciter l'égalité obtenue en appliquant à $\mathrm{F}(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$, $a > 0$.

e. Considérer $\mathrm{F}(x) = \mathrm{e}^{-x^2/a^2}$, et montrer que si θ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\theta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\pi n^2 t}, \quad \text{alors } \theta\Big(\frac{1}{t}\Big) = \sqrt{t}\,\theta(t).$$

Exercice 3 : *séries de Fourier doubles.* Si f est intégrable sur $[-\pi, \pi]^2$ on pose pour tous les entiers $m, n \in \mathbb{Z}$

$$c_{m,n}(f) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s,t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ms - \mathrm{i}nt} \,\frac{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t}{4\pi^2}$$

et pour tout $\mathrm{N} \geq 0$

$$(\mathrm{S_N} f)(x,y) = \sum_{-\mathrm{N} \leqslant m,n \leqslant \mathrm{N}} c_{m,n}(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx + \mathrm{i}ny}.$$

a. On désigne par $\mathrm{D_N}$ le noyau de Dirichlet usuel. Vérifier que

$$(\mathrm{S_N} f)(x,y) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s, y-t)\mathrm{D_N}(s)\mathrm{D_N}(t)\,\frac{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t}{4\pi^2}.$$

b. On suppose que φ est une fonction α-hölderienne définie sur $\mathbb{R}^2$ $(0 < \alpha \leq 1)$ et doublement 2π-périodique : $\varphi(x+2\pi, y) = \varphi(x, y+2\pi) = \varphi(x, y)$. Montrer que

$$\psi(s,t) = \varphi(x_0+s, y_0+t) - \varphi(x_0+s, y_0) - \varphi(x_0, y+t) + \varphi(x_0, y_0)$$

est bornée par un multiple de $\min(|s|^\alpha, |t|^\alpha)$. En déduire que $\psi(s,t)/|st|$ est intégrable sur $[-\pi,\pi]^2$. Déduire du lemme de Riemann-Lebesgue pour $\mathbb{R}^2$ que pour tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\varphi(x_0, y_0) = \lim_{\mathrm{N}} (\mathrm{S}_{\mathrm{N}}\varphi)(x_0, y_0).$$

c. À quelle condition sur l'entier k peut-on garantir que si φ est de classe C^k sur $\mathbb{R}^2$, alors

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} |c_{m,n}(\varphi)| < +\infty\,?$$

d. Montrer que les fonctions $(e_{m,n})_{m,n\in\mathbb{Z}}$ définies par $e_{m,n}(x,y) = e_m(x)e_n(y)$, où $e_m(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}$, forment une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2([-\pi,\pi]^2, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y/(4\pi^2))$.

Exercice 4. Soient k un nombre entier et $\alpha \in \mathbb{R}$ un nombre irrationnel ; déterminer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}kj\alpha}.$$

On considère une fonction f continue et 1-périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(j\alpha) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Généraliser aux sommes $n^{-2}\sum_{j,k=1}^{n} g(j\alpha, k\beta)$, dans le cas d'un couple (α,β) et d'une fonction g continue de deux variables telle que $g(x+1,y) = g(x,y+1) = g(x,y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. On considère un espace de Hilbert réel H.

a. Montrer qu'on peut munir $\mathrm{H}\times\mathbb{R}$ d'une structure d'espace de Hilbert réel. Si f est une fonction convexe continue sur H, vérifier que *l'épigraphe de f*, défini par

$$\mathrm{C} = \{(x,t) \in \mathrm{H}\times\mathbb{R} : f(x) \leq t\},$$

est un convexe fermé non vide dans l'espace $\mathrm{H}\times\mathbb{R}$. On suppose que $f(0) = 0$; projeter le point $(0,-1)$ sur C en (x_0, t_0) et en déduire que $t_0 = f(x_0) > -1$, puis montrer que f admet la minorante affine continue

$$x \in \mathrm{H} \to f(x_0) - \frac{1}{1+f(x_0)} \langle x - x_0, x_0\rangle.$$

b. On suppose que g est continue sur H et vérifie la propriété d'uniforme convexité suivante,

$$\forall x, h \in \mathrm{H}, \quad g(x+h) + g(x-h) - 2g(x) \geq 2\|h\|^2.$$

Montrer que $f(x) = g(x) - \|x\|^2$ est convexe. En déduire que g est minorée sur H, et que g atteint son minimum sur H, en un point unique.

Exercice 6. Si A est un borélien borné de $\mathbb{R}^d$ et g une fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}^d$, on peut poser pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$(\mathbf{1}_{\mathrm{A}} * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\mathrm{A}}(x-t) g(t)\, \mathrm{d}t.$$

Montrer que la fonction $\mathbf{1}_{\mathrm{A}} * g$ est continue. Si A est de mesure positive, montrer que l'ensemble $\mathrm{A} - \mathrm{A} = \{a_1 - a_2 : a_1, a_2 \in \mathrm{A}\}$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$.

Exercice 7 : *inégalité de convolution de Young.*
a. Inégalité de Hölder pour trois fonctions : on suppose que les nombres $\alpha, \beta, \gamma > 0$ vérifient $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Montrer que pour toutes fonctions mesurables positives u, v, w sur un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ on a

$$\int u^\alpha v^\beta w^\gamma \, \mathrm{d}\mu \le \Bigl(\int u \, \mathrm{d}\mu \Bigr)^\alpha \Bigl(\int v \, \mathrm{d}\mu \Bigr)^\beta \Bigl(\int w \, \mathrm{d}\mu \Bigr)^\gamma.$$

b. On suppose que $\alpha, \beta, \gamma > 0$ vérifient $\alpha + \beta + \gamma = 2$. Montrer que pour toutes fonctions mesurables positives $\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}$ sur $\mathbb{R}^d$ on a

$$\int \mathrm{U}(x-y)^\alpha \mathrm{V}(y)^\beta \mathrm{W}(x)^\gamma \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \le \Bigl(\int \mathrm{U}(x) \, \mathrm{d}x \Bigr)^\alpha \Bigl(\int \mathrm{V}(x) \, \mathrm{d}x \Bigr)^\beta \Bigl(\int \mathrm{W}(x) \, \mathrm{d}x \Bigr)^\gamma.$$

En déduire que si $p, q, r \ge 1$ et $1/p + 1/q = 1 + 1/r$, on a $\mathrm{L}^p * \mathrm{L}^q \subset \mathrm{L}^r$, et plus précisément $\|f * g\|_r \le \|f\|_p \, \|g\|_q$ (*inégalité de convolution de Young*).
Indication pour un cas particulier, $\alpha = \beta = \gamma = 2/3$: écrire $\mathrm{U}(x-y)^{2/3} \mathrm{V}(y)^{2/3} \mathrm{W}(x)^{2/3}$ comme produit des trois termes $(\mathrm{U}(x-y)\mathrm{V}(y))^{1/3}$, $(\mathrm{V}(y)\mathrm{W}(x))^{1/3}$ et $(\mathrm{U}(x-y)\mathrm{W}(x))^{1/3}$. Utiliser $\|f\|_r = \sup_{g \in \mathrm{B}_s} |\int fg|$, où B_s est la boule unité de L^s, $1/r + 1/s = 1$.

Exercice 8. On considère une fonction F_0 sur $\mathbb{R}$, lipschitzienne de constante C et à support contenu dans un intervalle fermé borné $[a, b]$; on introduit d'autre part une suite $u_1, u_2, \ldots$ de réels > 0 telle que $\sum_n u_n < +\infty$. Pour tout entier $n \ge 1$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}_n(x) = \Bigl(\mathrm{F}_{n-1} * (u_n^{-1} \mathbf{1}_{[0, u_n]}) \Bigr)(x) = \frac{1}{u_n} \int_{x - u_n}^{x} \mathrm{F}_{n-1}(t) \, \mathrm{d}t.$$

a. Montrer que F_n est lipschitzienne de constante C, et que son support est contenu dans l'intervalle $[a, b + u_1 + \cdots + u_n]$. Montrer que F_n est de classe C^n sur $\mathbb{R}$. Vérifier que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{F}_n(t) \, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{F}_0(t) \, \mathrm{d}t.$$

b. Montrer que $|\mathrm{F}_n(x) - \mathrm{F}_{n-1}(x)| \le \mathrm{C} u_n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (cette inégalité n'est pas optimale mais nous suffira).

c. Montrer que F_n converge uniformément vers une fonction F, et que F est de classe C^∞ à support compact (*indication* : pour prouver la dérivabilité, remplacer F_0 par F_1', puis par F_2'', ...). Vérifier que l'intégrale de F est égale à celle de F_0 et que le support de F est contenu dans l'intervalle $[a, b + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n]$.

Exercice 9. Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, montrer que la transformée de Fourier de $f * g$ est le produit des transformées de Fourier de f et de g.

Si g est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, si g et g' sont dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, montrer que $(\mathcal{F}g')(y) = \mathrm{i}y(\mathcal{F}g)(y)$, et

$$(*) \qquad \int_{\mathbb{R}} (1+y^2)\,|(\mathcal{F}g)(y)|^2 \,\mathrm{d}y < \infty.$$

Étudier la réciproque : si $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ vérifie $(*)$, que peut-on en déduire ?

Exercice 10 : *base de Shannon sur* $\mathbb{R}$.

a. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ on considère l'intervalle $\mathrm{I}_n = (2n-1, 2n+1)$. Montrer que le système des fonctions

$$f_{n,k}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{1}_{\mathrm{I}_n}(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi k x}, \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

b. Expliciter la base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ obtenue par transformation de Fourier.

c. On considère le sous-espace fermé de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ formé des fonctions dont la transformée de Fourier est nulle en dehors de $[-1, 1]$. Déduire de la question précédente une base hilbertienne pour ce sous-espace.

Exercice 11 : *transformation de Hilbert.*

a. Pour tout $\varepsilon > 0$ on considère la fonction f_ε définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\varepsilon(x) = \frac{\mathbf{1}_{|x|>\varepsilon}}{\pi x}.$$

Vérifier que f_ε est dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et calculer sa transformée de Fourier.

b. Montrer que pour toute fonction $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, la convolution $g * f_\varepsilon$ tend vers une limite $\mathrm{H}g$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ quand $\varepsilon \to 0$. Montrer que H définit une application linéaire continue de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, isométrique ; déterminer son carré H^2.

c. Montrer que si θ est à support compact, paire, égale à 1 dans un voisinage de 0, on a pour toute φ fonction C^1 à support compact et tout $x \in \mathbb{R}$

$$(\mathrm{H}\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x-y) - \varphi(x)\theta(y)}{\pi y}\,\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\varphi(x-y)}{\pi y}\,\mathrm{d}y.$$

Exercice 12 : *un théorème de Borel.* Pour les besoins de l'exercice, on appellera *série de fonctions de type* (B) toute série de fonctions sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$(\beta) \qquad x \in \mathbb{R} \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}\,\theta(b_n x)$$

où $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de nombres réels ou complexes, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels > 1 telle que $\ln(1+|a_n|) = \mathrm{O}(\ln b_n)$ quand $n \to +\infty$, et où θ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $[-1, 1]$.

a. Montrer que toute série de type (B) est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. *Indication :* on notera que pour borner uniformément $x^n\theta(b_n x)$, seuls comptent les x tels que $|x| \le 1/b_n$.

b. On suppose de plus que la fonction θ précédente est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; montrer que la fonction f définie par la somme de la série (β),

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}\,\theta(b_n x)$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et que sa dérivée peut se calculer par dérivation terme à terme. *Indication* : on notera que la série dérivée de la série (β) s'exprime comme la somme de deux séries qui sont encore de type (B).

c. En déduire par récurrence que si θ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, la fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, et que ses dérivées peuvent se calculer par dérivations terme à terme successives.

d. On suppose de plus, pour finir, que θ est C^∞ et égale à 1 dans un voisinage de 0. Montrer que $f^{(n)}(0) = a_n$ pour tout $n \ge 0$.

e. Étant donnée une suite numérique (a_n) quelconque, montrer qu'il existe une fonction f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ qui admet ces nombres comme dérivées successives au point 0 (c'est un théorème de Borel).

Exercice 13. On suppose que μ est une mesure infinie, et on désigne par X l'espace vectoriel des fonctions réelles $f \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mu) \cap \mathrm{L}^4(\Omega,\mu)$.

a. Montrer que X est complet pour la norme définie par $\|f\|_\mathrm{X} = \|f\|_2 + \|f\|_4$.

b. Montrer que toute fonction $g \in \mathrm{L}^2 + \mathrm{L}^{4/3}$, c'est-à-dire de la forme $g = g_0 + g_1$ avec $g_0 \in \mathrm{L}^2(\Omega,\mu)$ et $g_1 \in \mathrm{L}^{4/3}(\Omega,\mu)$, définit une forme linéaire ξ continue sur X par la formule

$$\forall f \in \mathrm{X}, \quad \xi(f) = \int_\Omega fg\,\mathrm{d}\mu.$$

c. On suppose que ℓ est une forme linéaire continue sur X (muni de la norme précédente) et on définit une fonction réelle φ sur X en posant

$$\forall f \in \mathrm{X}, \quad \varphi(f) = \int_\Omega (f^2 + f^4)\,\mathrm{d}\mu - \ell(f)\,;$$

montrer que

$$m = \inf\{\varphi(f) : f \in \mathrm{X}\} > -\infty.$$

Vérifier que pour toutes $f, h \in \mathrm{X}$

$$\frac{1}{2}\big(\varphi(f+h) + \varphi(f-h)\big) - \varphi(f) \ge \int_\Omega (h^2 + h^4)\,\mathrm{d}\mu.$$

En déduire que le diamètre du fermé $\mathrm{F}_\varepsilon = \{\varphi \le m + \varepsilon\} \subset \mathrm{X}$ tend vers 0 quand $\varepsilon > 0$ tend vers 0, puis que φ atteint son minimum m en un point unique $f_0 \in \mathrm{X}$.

Montrer que la forme linéaire ℓ provient de la fonction $g = 2f_0 + 4f_0^3 \in \mathrm{L}^2 + \mathrm{L}^{4/3}$.

d. Pour $2 < p < 4$, montrer que X s'injecte continûment dans $\mathrm{L}^p(\Omega,\mu)$, avec image dense. En déduire que les formes linéaires continues sur l'espace $\mathrm{L}^p(\Omega,\mu)$ proviennent des fonctions de $\mathrm{L}^q(\Omega,\mu)$, $1/q + 1/p = 1$.