Exercice 1. Soit $(\mathrm{U}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$; montrer que la loi de la variable aléatoire

$$\mathrm{U} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}\,\mathrm{U}_n$$

admet une densité de classe C^∞ à support compact.
Indication : on pourra s'intéresser à la fonction caractéristique de la variable aléatoire U (transformée de Fourier de la loi de U).

Exercice 2. Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x < +\infty$ pour tout nombre réel a ; montrer que la transformée de Fourier de f se prolonge au plan complexe et que ce prolongement, qu'on notera

$$\widehat{f}(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xz}\,\mathrm{d}x$$

est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini.

Appliquer cette remarque à la fonction gaussienne $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$; montrer que $\widehat{f}(\mathrm{i}t)$ se calcule explicitement pour t réel, et en déduire la valeur de $\widehat{f}(t)$.

Exercice 3. Démontrer la formule d'échange pour la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ sur l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)(\mathcal{F}g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}f)(y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Exercice 4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)/x$.

a. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x,$$

ce qui prouve que l'intégrale de f est semi-convergente. On posera

$$\ell = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

b. Vérifier que la fonction f est dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

c. Montrer que

$$g(t) = \lim_n \int_{-n}^{n} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}x$$

existe pour tout t, et calculer sa valeur (en fonction de t et de ℓ).

d. Déduire la valeur de ℓ de la formule d'inversion et du fait que f est la transformée de Fourier de $\frac{1}{2}\mathbf{1}_{(-1,1)}$.

Exercice 5 : *théorème de Fejér sur* $\mathbb{R}$.

a. Déterminer la transformée de Fourier de la fonction paire f sur $\mathbb{R}$ qui vaut

$$f(x) = (2-x)/4 \text{ si } 0 \le x \le 2, \quad f(x) = 0 \text{ si } x \ge 2.$$

b. On pose

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2,$$

et $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$ pour tout entier $n \ge 1$. Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, exprimer la transformée de Fourier de $f * \varphi_n$ à partir de celle de f.

c. Montrer que si f est bornée, intégrable sur $\mathbb{R}$ et continue au point x, on a

$$f(x) = \lim_n \frac{1}{2\pi}\int_{-2n}^{2n} \widehat{f}(y)\Big(1 - \frac{|y|}{2n}\Big)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\, \mathrm{d}y.$$

d. Énoncer et démontrer un théorème de convergence dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, $p = 1$ ou $p = 2$, analogue au théorème de Fejér pour les séries de Fourier.

Exercice 6.

a. Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ formé des fonctions $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ telles que $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{g} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

b. Montrer que toute fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est limite dans L^2 de la suite des fonctions

$$f_n : x \to \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} (\mathcal{F}f)(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\, \mathrm{d}t.$$

c. On suppose que $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, et que sa transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ est nulle (presque partout) en dehors de l'intervalle $[-a, a]$. Montrer que f est égale presque partout à la fonction continue F définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} (\mathcal{F}f)(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\, \mathrm{d}t.$$

Montrer que F se prolonge en fonction entière sur $\mathbb{C}$, notée $z \to \mathrm{F}(z)$, qui vérifie

$$(*) \qquad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \lim_{|x|\to\infty} \mathrm{F}(x + \mathrm{i}y) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\mathrm{F}(x + \mathrm{i}y)| \le \mathrm{C}\, \mathrm{e}^{a|y|}.$$

d. Étudier la réciproque : si $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, continue sur $\mathbb{R}$, se prolonge en fonction entière F vérifiant $(*)$, alors la transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ est nulle en dehors de $[-a, a]$ (l'équivalence ainsi démontrée est une des formes du *théorème de Paley-Wiener*).

Indication : montrer que la fonction $f_n = \mathbf{1}_{[-n,n]}f$ vérifie, pour tout $t < -a$,

$$\widehat{f_n}(t) = \mathrm{i}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}tn}\int_0^{+\infty} \mathrm{F}(-n + \mathrm{i}y)\, \mathrm{e}^{ty}\, \mathrm{d}y - \mathrm{i}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tn}\int_0^{+\infty} \mathrm{F}(n + \mathrm{i}y)\, \mathrm{e}^{ty}\, \mathrm{d}y,$$

et en déduire que $\lim_n \widehat{f_n}(t) = 0$. Adapter l'argument pour le cas $t > a$.

Exercice 7. On désigne par U le disque unité ouvert du plan complexe. Soit f une fonction holomorphe de U dans U ; utiliser la série de Taylor de f en 0 et la théorie des séries de Fourier pour montrer que : on a $|f'(0)| \le 1$, et si $|f'(0)| = 1$, alors il existe λ de module 1 tel que $f(z) = \lambda z$ pour tout $z \in \mathrm{U}$ (le lecteur aura reconnu le très classique *lemme de Schwarz*, sous un habillage à peine moins classique).

Exercice 8. On suppose que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$ existe pour tout $z \in \mathbb{C}$; on suppose de plus que la partie réelle $g(z) = \mathrm{Re}\, f(z)$ vérifie une majoration de la forme

$$\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \exists \mathrm{M},\ \forall z \in \mathbb{C}, \quad |g(z)| \le \mathrm{M}\,(1 + |z|^{\mathrm{N}}).$$

En déduire que f est un polynôme de degré $\le \mathrm{N}$.

Indication : pour r tendant vers l'infini, étudier les coefficients de la série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par $\theta \in [0, 2\pi] \to g(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$.

Exercice 9. On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$, borné ou non, et une mesure μ sur I, de la forme $\mathrm{d}\mu(x) = w(x)\,\mathrm{d}x$, où w est une fonction > 0 sur I, mesurable à valeurs finies. On suppose qu'il existe une valeur $\alpha > 0$ telle que

$$\int_{\mathrm{I}} \mathrm{e}^{\alpha|x|}\ w(x)\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

a. Montrer que l'espace $\mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \mu)$ contient toutes les fonctions polynomiales. Montrer que le sous-espace des fonctions polynomiales est dense dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \mu)$ (on rappelle qu'il en résulte, par Gram-Schmidt, l'existence d'une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \mu)$ formée de polynômes orthogonaux).

Indication : si $f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \mu)$ est orthogonale à tous les polynômes, montrer que la fonction holomorphe g définie pour $|\,\mathrm{Re}\, z| < \alpha/2$ par

$$g(z) = \int_{\mathrm{I}} \mathrm{e}^{zx}\, f(x)\, w(x)\,\mathrm{d}x$$

est nulle ; en déduire que $\widehat{fw}$ est nulle, donc f aussi.

b. Montrer que le résultat s'applique lorsque $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ et $w(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ (mesure gaussienne, polynômes d'Hermite), ou bien $\mathrm{I} = [0, \infty)$ et $w(x) = \mathrm{e}^{-x}$ (polynômes de Laguerre).

Exercice 10. On fixe un entier n_0. Montrer que la famille des monômes $t \to t^n$, pour tous les $n \ge n_0$, engendre un sous-espace vectoriel dense dans $\mathrm{L}^2(0, 1)$.

Exercice 11. On considère une fonction φ continue > 0 sur $[0, +\infty[$; on suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varphi(r) \le \mathrm{e}^{-\varepsilon r}$ pour tout $r \ge 0$. On définit une fonction radiale w continue sur $\mathbb{C}$ en posant $w(z) = \varphi(|z|)$, et on introduit l'espace de Bergman $\mathrm{B}(w)$ des fonctions entières $f(z)$ telles que

$$\|f\|^2 := \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 w(z)\,\mathrm{d}\lambda(z) < +\infty,$$

muni du produit scalaire et de la norme de l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{C}, w\,\mathrm{d}\lambda)$ (où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$).

a. Montrer que les fonctions polynomiales $p_n(z) = z^n$, $n \geq 0$, sont dans l'espace $\mathrm{B}(w)$ et sont deux à deux orthogonales. Si $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \in \mathrm{B}(w)$, montrer que

$$(*) \qquad \sum |a_n|^2 \, \|p_n\|^2 < +\infty.$$

b. Montrer que pour tout $r > 0$, il existe $c > 0$ tel que l'on ait $\|p_n\| \geq c r^n$ pour tous les entiers $n \geq 0$. Montrer la réciproque de $(*)$: si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de scalaires vérifiant $(*)$, la série entière $\sum a_n z^n$ est de rayon de convergence infini, et la fonction entière f ainsi définie est dans $\mathrm{B}(w)$. Montrer que les évaluations $f \to f(z)$ sont continues sur $\mathrm{B}(w)$, pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\mathrm{B}(w)$ est un sous-espace fermé de $\mathrm{L}^2(\mathbb{C}, w\,\mathrm{d}\lambda)$.
c. Pour une fonction w sur $\mathbb{C}$ non nécessairement radiale, mais telle que $w(z) \leq \mathrm{e}^{-\varepsilon|z|}$ pour un $\varepsilon > 0$, montrer que les polynômes sont denses dans $\mathrm{B}(w)$ (*indication* : adapter la méthode de l'exercice 9). Montrer que les évaluations sont continues. Montrer que $\mathrm{B}(w)$ est un sous-espace fermé de $\mathrm{L}^2(\mathbb{C}, w\,\mathrm{d}\lambda)$.

Exercice 12. Le polynôme de Tchebychev T_n est déterminé par le fait que pour tout θ réel, on a $\mathrm{T}_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$. Montrer qu'on a aussi

$$\mathrm{T}_n(\operatorname{ch}\theta) = \operatorname{ch}(n\theta)$$

pour tout θ, et que pour $x \geq 1$,

$$\mathrm{T}_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n}{2}.$$

Exercice 13. Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

à partir de la détermination du logarithme complexe $\ln z$ sur l'ouvert

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$$

qui est donnée par $\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} z^n/n$ quand $|z| < 1$.
Indication : on rappelle que pour cette détermination, si $r > 0$ et $-\pi < \theta < \pi$, alors $\ln(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \ln r + \mathrm{i}\theta$; appliquer à $z = r\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}x}$, avec $0 < r < 1$, r tendant vers 1.

Exercice 14 : *polynômes d'Hermite*. On pose pour tout entier $n \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{H}_n(x) = (-1)^n \,\mathrm{e}^{x^2} \,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big(\mathrm{e}^{-x^2}\big).$$

a. Montrer que H_n est un polynôme de degré n. Calculer H_0, H_1 et H_2.
b. Montrer que pour tout $n \geq 0$, la fonction $h_n : x \to \mathrm{H}_n(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ est un vecteur propre de la transformation de Fourier (on pourra utiliser une relation de récurrence entre h'_n, h_n et h_{n+1}, et les rapports entre Fourier et dérivation). Quelles sont les valeurs propres possibles pour la transformation de Fourier $\mathcal{F}$, agissant sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$?
c. Soit φ la fonction définie par $\varphi(z) = \mathrm{e}^{-z^2}$; on rappelle que $\varphi^{(n)}(x_0)$ s'exprime à partir des polynômes (H_n). Exprimer le développement en série de Taylor de $t \to \varphi(x_0 - t)$. En déduire la *fonction génératrice* des polynômes d'Hermite,

$$\mathrm{e}^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{H}_n(x)\,\frac{t^n}{n!}.$$

Utiliser la fonction génératrice pour retrouver le résultat précédent sur les vecteurs propres de $\mathcal{F}$.

Exercice 15 : *injectivité de la transformation de Laplace.* Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors d'un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ et telle que $x \to f(x)\,\mathrm{e}^{-s_0 x}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$ pour un $s_0 \in \mathbb{R}$; on définit la *transformée de Laplace* $\mathcal{L}f$ de la fonction f sur l'ouvert $\mathrm{U} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > s_0\}$ du plan complexe par

$$\forall z \in \mathrm{U}, \quad (\mathcal{L}f)(z) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-zx}\, f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que $\mathcal{L}f$ est holomorphe dans U. Montrer que si $\mathcal{L}f$ est nulle sur un intervalle non vide de $]s_0, +\infty[$, alors f est nulle presque partout sur $\mathbb{R}$. *Indication* : on devra apercevoir une transformée de Fourier.

Exercice 16 : *transformation de Hilbert sur le cercle.*

a. Soit φ une fonction de $\mathrm{L}^2(0, 2\pi)$, avec une série de Fourier de la forme $\sum_{n \geqslant 0} c_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ (autrement dit, tous ses coefficients de Fourier négatifs sont nuls) ; montrer qu'il existe une unique fonction holomorphe f dans le disque unité U du plan complexe telle que les fonctions φ_r, définies pour $r < 1$ par la formule $\varphi_r(\theta) = f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ convergent vers φ dans $\mathrm{L}^2(0, 2\pi)$, lorsque $r \to 1$.

b. Montrer que pour chaque fonction *réelle* $\psi \in \mathrm{L}^2(0, 2\pi)$ il existe une unique fonction réelle $\mathrm{H}(\psi) \in \mathrm{L}^2(0, 2\pi)$ d'intégrale nulle telle que la fonction $\varphi = \psi + \mathrm{i}\,\mathrm{H}(\psi)$ vérifie les conditions du paragraphe précédent. Montrer que H définit un opérateur linéaire borné sur $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}(0, 2\pi)$ et calculer sa norme.

c. Si ψ est d'intégrale nulle, montrer que

$$\int_0^{2\pi} \psi^2(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} - \int_0^{2\pi} (\mathrm{H}(\psi)(x))^2\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = 0 = \int_0^{2\pi} \psi(x)\mathrm{H}(\psi)(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}\cdot$$

Si u est un polynôme trigonométrique réel, montrer que $\mathrm{H}(u)$ est l'unique polynôme trigonométrique réel v d'intégrale nulle tel qu'il existe un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ vérifiant

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad u(\theta) + \mathrm{i}v(\theta) = \mathrm{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}).$$

Déterminer $v = \mathrm{H}(u)$ lorsque

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad u(\theta) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \big(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\big).$$

d. Soit u un polynôme trigonométrique réel, d'intégrale nulle sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, et posons $v = \mathrm{H}(u)$; déterminer $\mathrm{H}(u^2 - v^2)$.

Indication : si $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ est un polynôme, son carré P^2 aussi.

e. Si u est d'intégrale nulle, montrer que $\mathrm{H}(2uv) = v^2 - u^2$; en déduire que

$$\int_0^{2\pi} \big(v^2(x) - u^2(x)\big)^2\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} \leq 4 \int_0^{2\pi} u^2(x)v^2(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi},$$

puis déduire que H est borné sur $\mathrm{L}^4(0, 2\pi)$ (on pourra utiliser $2s^2t^2 \leq \varepsilon^{-1}s^4 + \varepsilon t^4$). Montrer que H est borné sur $\mathrm{L}^8(0, 2\pi)$, $\mathrm{L}^{16}(0, 2\pi)$, etc. (il résulte du théorème d'interpolation de Riesz-Thorin que H est borné sur tous les espaces L^p, $2 \leq p < \infty$ et le cas $1 < p \leq 2$ s'ensuit par dualité).