Exercice 1 bis.

a. Soient X une variable aléatoire réelle et μ une probabilité sur $\mathbb{R}$; montrer que : *pour que μ soit la loi de* X, *il suffit que*

$$\mathrm{E}\psi(\mathrm{X}) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

pour toute fonction ψ de classe C^2 *à support compact sur* $\mathbb{R}$.

Indication : approcher les indicatrices d'intervalle, de préférence par en dessous.

b. On suppose que la fonction caractéristique φ_X de X est intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour toute fonction continue bornée ψ sur $\mathbb{R}$, intégrable sur $\mathbb{R}$ ainsi que sa transformée de Fourier $\widehat{\psi}$, on a

$$\mathrm{E}\psi(\mathrm{X}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \psi(x)\varphi_\mathrm{X}(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Indication : Fubini et Fourier inverse pour ψ.

En déduire que la loi de X admet la densité

$$f_\mathrm{X}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi_\mathrm{X}(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t.$$

c. Soit $(\mathrm{U}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$; montrer que la suite $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^n 2^{-k}\mathrm{U}_k$ converge vers une limite S dans tous les espaces L^p, $1 \le p \le +\infty$, et aussi presque sûrement. Montrer que la suite (φ_{S_n}) converge simplement vers φ_S. Montrer que pour tout $m \ge 1$, il existe une constante C_m telle que pour tout $n \ge m$, on ait

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\varphi_{\mathrm{S}_n}(t)| \le \mathrm{C}_m(1+|t|)^{-m}.$$

d. Montrer que la loi de la variable aléatoire

$$\mathrm{S} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}\,\mathrm{U}_n$$

admet une densité de classe C^∞, nulle en dehors de l'intervalle $[-1/2, 1/2]$.

Indication : Fourier et dérivation.

On a ainsi « construit » une fonction C^∞ *à support compact par une méthode moins habituelle.*