Exercice 1. Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$; calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

en utilisant l'holomorphie et un contour adapté (on fera apparaître la fonction Γ en introduisant la demi-droite imaginaire $\mathbb{R}_+\,\mathrm{i}$).

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$; vérifier que la fonction

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \qquad |z| \le 1,$$

définit une bijection du disque unité ouvert $\mathrm{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ sur lui-même, et une bijection du disque unité fermé sur lui-même. Calculer la bijection inverse.

On suppose que $(a_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathrm{U}$ est telle que $\sum(1-|a_n|) < +\infty$. Montrer que la suite de fonctions (F_n) définie par

$$\mathrm{F}_n(z) = \prod_{j=1}^n \overline{a}_j\,\frac{a_j - z}{1-\overline{a}_j z}$$

converge uniformément sur tout compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{U}$ vers une fonction holomorphe F dans U, dont les zéros sont exactement les points de la suite (a_n) (on écrira $\overline{a}_j\,(a_j - z)/(1-\overline{a}_j z)$ sous la forme $1+\varepsilon_j(z)$).

Montrer qu'on peut choisir la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de façon que l'adhérence de l'ensemble des zéros de la fonction F dans U contienne le cercle unité ; montrer que la fonction F ainsi obtenue ne peut pas être prolongée en fonction holomorphe sur un ouvert plus grand que U.

Exercice 3. On désigne par B une matrice complexe de taille $d \times d$, et par K l'ensemble de ses valeurs propres. On considère un chemin fermé γ dans $\mathbb{C}$ qui ne rencontre pas K et on lui associe la matrice

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma (z\mathrm{I}_d - \mathrm{B})^{-1}\,dz.$$

a. Montrer que pour r assez grand et $\gamma = \gamma_r$ (le parcours positif habituel du cercle de rayon r centré en 0), la matrice P est égale à la matrice unité I_d.

b. On suppose que γ parcourt (une fois) un cercle dans le sens direct, et que ce cercle contient exactement une valeur propre λ de B. Montrer que la matrice P est un projecteur sur le sous-espace caractéristique de B associé à la valeur propre λ.

c. Si γ est un chemin fermé qui ne rencontre pas K, montrer que la matrice P est une combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs de projecteurs caractéristiques.

Exercice 4. Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe s, t tels que $0 \le s < t \le 1$ et $f(t) - f(s) = 1/2$.

Indication : sur le triangle T des points (s,t) tels que $0 \le t \le s \le 1$, on définit $\varphi(s,t) = f(s) - f(t)$, et on considère l'indice autour de $1/2$ du chemin fermé (lacet) γ obtenu en composant φ avec le parcours du bord de T dans le sens positif.

Exercice 5.
a. On suppose que g est 2π-périodique, intégrable sur chaque période ; pour toute fonction f de l'espace $\mathrm{C}_{2\pi\text{-per}}$ des fonctions continues 2π-périodiques, on pose

$$\mathrm{T}_g f = f *_{\text{per}} g, \quad (\mathrm{T}_g f)(x) = \int_0^{2\pi} f(x-y)g(y)\,\frac{\mathrm{d}y}{2\pi}.$$

Montrer que la norme de l'opérateur T_g, agissant de $\mathrm{C}_{2\pi\text{-per}}$ dans lui-même, est égale à la norme de g dans l'espace $\mathrm{L}^1([0,2\pi], \mathrm{d}x/(2\pi))$.

b. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\int_0^{2\pi} |\mathrm{D}_n(x)|\,\mathrm{d}x \geq c\ln(n+1)$, où D_n désigne le noyau de Dirichlet, $\mathrm{D}_n(x) = \sin(nx + x/2)/\sin(x/2)$.

c. Déduire du théorème de Banach-Steinhaus qu'il existe des fonctions 2π-périodiques continues sur $\mathbb{R}$ dont la série de Fourier ne converge pas au point 0 (par exemple).

Exercice 6 : distance de Hausdorff. Soient (X, d) un espace métrique non vide et x_0 un point fixé dans X ; on désignera par $\mathcal{F}_b$ l'ensemble des fermés F non vides de X qui sont *bornés pour la distance* d, c'est-à-dire tels que $\sup_{y\in\mathrm{F}} d(y, x_0) < +\infty$. À chaque fermé $\mathrm{A} \in \mathcal{F}_b$ on associe la fonction φ_A définie sur X par

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad \varphi_\mathrm{A}(x) = d(x, \mathrm{A}) - d(x, x_0) = \inf\{d(x,a) - d(x,x_0) : a \in \mathrm{A}\}.$$

a. Vérifier que φ_A est bornée sur X. Montrer que pour tous $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{F}_b$ on a

$$\|\varphi_\mathrm{A} - \varphi_\mathrm{B}\|_\infty = \max\bigl(\sup\{d(a,\mathrm{B}) : a \in \mathrm{A}\}, \sup\{d(b,\mathrm{A}) : b \in \mathrm{B}\}\bigr).$$

En déduire que la quantité précédente, qu'on notera $h(\mathrm{A},\mathrm{B})$, est une distance sur l'ensemble $\mathcal{F}_b$ (c'est la *distance de Hausdorff* entre sous-ensembles fermés).

b. On suppose que (X, d) est complet ; montrer que $\mathcal{F}_b$ est complet pour la distance de Hausdorff.

Indication : considérer une suite de Cauchy (A_k) telle que $h(\mathrm{A}_k, \mathrm{A}_{k+1}) < 2^{-k-1}$ pour tout $k \geq 0$, et l'ensemble A des points $a \in \mathrm{X}$ qui sont limite d'une suite (a_k) avec $a_k \in \mathrm{A}_k$ pour tout $k \geq 0$. Montrer que tout point $a_k \in \mathrm{A}_k$ est à distance $< 2^{-k}$ d'un point de A, et que tout point $a \in \mathrm{A}$ est à distance $< 2^{-k} + \varepsilon$ d'un point de A_k, pour tout $\varepsilon > 0$.

c. On suppose que (X, d) est compact ; montrer que $\mathcal{F}_b$ est compact pour la distance de Hausdorff.

Exercice 7. On suppose qu'une suite (f_n) de fonctions réelles ou complexes continues sur $[0,1]$ converge simplement vers une fonction f ; on fixe $\varepsilon > 0$ et on pose pour tout entier $m \geq 0$

$$\mathrm{F}_m = \{x \in [0,1] : \sup_{n,p \geqslant m} |f_n(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon\}.$$

a. Vérifier que $[0,1]$ est réunion des ensembles fermés (F_m). En déduire que la réunion des intérieurs des F_m est dense dans $[0,1]$.

b. On définit la fonction $\operatorname{osc}(f)$ (oscillation de f) en posant

$$\operatorname{osc}(f)(x) = \lim_{\delta\to 0}\Bigl(\sup\{|f(y) - f(z)| : |y-x| < \delta,\ |z-x| < \delta\}\Bigr).$$

Montrer que pour tout α réel, l'ensemble $\{\operatorname{osc}(f) < \alpha\}$ est ouvert. Vérifier que f est continue au point x si et seulement si $\operatorname{osc}(f)(x) = 0$. Majorer $\operatorname{osc}(f)(x)$ en un point x de l'intérieur de F_m.

c. Montrer que l'ensemble des points de continuité de f est un G_δ, dense dans $[0,1]$.

Exercice 8 : *régularité des mesures sur la tribu borélienne d'un espace polonais.* Soit μ une probabilité sur la tribu borélienne d'un espace métrique (X, d) complet et séparable ; le but de l'exercice est de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $\mathrm{K}_\varepsilon \subset \mathrm{X}$ tel que $\mu(\mathrm{K}_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$.

a. Montrer que pour tous $r > 0$ et $\alpha > 0$, il existe un fermé F de X qui est contenu dans une réunion finie de boules de rayon r, et qui est tel que $\mu(\mathrm{F}) > 1 - \alpha$.

Indication : soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite dense dans X *; considérer* $\mathrm{A}_n = \bigcup_{i=0}^n \mathrm{B}(x_i, r/2)$.

b. Conclure en appliquant ce qui précède avec $r = 2^{-k}$ et $\alpha = \varepsilon/2^{k+1}$, pour tout $k \geq 0$.

Indication : on obtient ainsi une suite (F_k) *de fermés ; considérer* $\mathrm{K} = \bigcap_{k\geqslant 0} \mathrm{F}_k$.

Exercice 9. On dit qu'un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ est *discret* dans $\mathbb{R}$ si pour tout réel y, il existe un ouvert V de $\mathbb{R}$ contenant y et qui contient au plus un point de D. Montrer que D est fermé et dénombrable.

Exercice 10. Montrer que tout espace métrique complet non vide et sans point isolé contient un sous-ensemble homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor.

Exercice 11 : *une inégalité de Hardy.*
a. On considère une fonction borélienne positive φ sur $[0, \infty) \times [0, 1]$ et un nombre réel p tel que $1 \leq p < +\infty$. Montrer le cas suivant de *l'inégalité intégrale de Minkowski*, dont on aura besoin plus loin,

$$\Bigl(\int_0^{+\infty} \Bigl(\int_0^1 \varphi(x, y)\,\mathrm{d}y\Bigr)^p \mathrm{d}x\Bigr)^{1/p} \leq \Bigl(\int_0^1 \Bigl(\int_0^{+\infty} \varphi(x, y)^p\,\mathrm{d}x\Bigr)^{1/p} \mathrm{d}y.$$

b. Montrer l'inégalité suivante, dans le cas $1 < p \leq +\infty$ (une *inégalité de Hardy*)

$$\Bigl(\int_0^{+\infty} \Bigl(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\Bigr)^p \mathrm{d}x\Bigr)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1}\,\|f\|_{\mathrm{L}^p(0,\infty)}.$$

c. Montrer que l'application linéaire T_p qui associe à chaque $f \in \mathrm{L}^p(0, \infty)$ la fonction F définie sur $(0, \infty)$ par $\mathrm{F}(x) = x^{-1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue de L^p dans L^p et que

$$\|\mathrm{T}_p\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^p)} = \frac{p}{p-1}.$$

Indication : quand $\varepsilon > 0$ tend vers 0, comparer les normes des fonctions f_ε et $\mathrm{T}f_\varepsilon$, où on a posé $f_\varepsilon(x) = x^{-1/p}$ quand $\varepsilon < x < 1$ et $f_\varepsilon(x) = 0$ sinon ; on minorera la norme de la fonction $\mathrm{T}f_\varepsilon$ en ne regardant que l'intervalle $[\varepsilon, 1]$.

Exercice 12. On définit un opérateur linéaire P sur $\mathrm{L}^2(0, 1)$ en posant pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^2(0, 1)$

$$\forall s \in (0, 1), \quad (\mathrm{P}f)(s) = \int_0^s f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. Vérifier que P est borné ; montrer que P est compact ; montrer que P est injectif.

b. Déterminer l'adjoint P^*. Diagonaliser $\mathrm{P}^*\mathrm{P}$.

Indication : si les fonctions f, g sont continues, les fonctions $\mathrm{P}f$ et P^*g sont dérivables ; montrer que les fonctions propres de $\mathrm{P}^*\mathrm{P}$ vérifient une équation différentielle, qu'on résoudra en tenant compte des diverses valeurs aux bornes.

Exercice 13.

a. Dans un espace de Banach E on considère une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de vecteurs telle que $\lim_n x_n = 0_{\mathrm{E}}$. On désigne par F l'adhérence de l'enveloppe convexe de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$. Démontrer que F est compact.

b. On suppose maintenant que K est un compact de E, et on veut montrer qu'il existe un ensemble F, construit comme dans la question précédente, tel que $\mathrm{K} \subset \mathrm{F}$.

Indication. On montrera d'abord le fait suivant : supposons que $\mathrm{K} \subset \mathrm{B}(0_{\mathrm{E}}, 1)$; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fini $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}(0_{\mathrm{E}}, (1-\varepsilon)^{-1})$ et un compact $\mathrm{K}_1 \subset \mathrm{B}(0_{\mathrm{E}}, \varepsilon)$ tels que K soit contenu dans l'enveloppe convexe de la réunion de A et de K_1. On pourra prendre un ensemble fini $\mathrm{C} \subset \mathrm{K}$ tel que la réunion des boules de rayon $\alpha < \varepsilon^2$ centrées aux points de C recouvre K, puis poser $\mathrm{A} = (1-\varepsilon)^{-1}\mathrm{C}$ et définir K_1 comme un multiple convenable de la réunion des translatés

$$\mathrm{K}_2 = \bigcup_{c \in \mathrm{C}} \Big(\big(\mathrm{K} \cap \overline{\mathrm{B}(c, \alpha)}\big) - c \Big).$$

Exercice 14. On rappelle que la fonction de Bessel J_0 peut être exprimée par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{J}_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

La fonction J_0 admet une infinité de zéros réels > 0 qui interviendront dans cet exercice, et qu'on notera $z_1 < \ldots < z_k < \ldots$.

a. Vérifier que $x\,\mathrm{J}_0''(x) + \mathrm{J}_0'(x) + x\,\mathrm{J}_0(x) = 0$ pour tout x ; chercher une autre solution $x \to y(x)$ sur $]0, z_1[$ de l'équation différentielle (de Bessel) $x\,y'' + y' + x\,y = 0$, en l'exprimant sous la forme $y(x) = u(x)\mathrm{J}_0(x)$; vérifier que $x\mathrm{J}_0(x)^2 u'(x)$ est constante et en déduire que les solutions sur $]0, z_1[$ qui restent bornées au voisinage de 0 sont proportionnelles à J_0. Si y vérifie l'équation de Bessel et si μ est un réel > 0, quelle est l'équation vérifiée par la fonction z définie par $z(x) = y(\mu x)$?

b. On désigne par ν la mesure à densité $\mathrm{d}\nu(t) = t\,\mathrm{d}t$ sur l'intervalle $[0, 1]$, et on définit un opérateur linéaire T sur l'espace réel $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2([0,1], \nu)$ en posant pour toute $f \in \mathrm{H}$

$$\forall s \in]0, 1], \quad (\mathrm{T}f)(s) = \ln(s) \int_0^s f(t)\,t\,\mathrm{d}t + \int_s^1 \ln(t) f(t)\,t\,\mathrm{d}t.$$

Vérifier que T est borné, hermitien, compact ; montrer que $\mathrm{T}f$ se prolonge en fonction continue sur $[0, 1]$.

c. Dans le cas où f est continue sur $[0, 1]$, montrer que $\mathrm{F} = \mathrm{T}f$ est deux fois dérivable sur l'ouvert $]0, 1[$ et y vérifie $(x\mathrm{F}'(x))' = xf(x)$. En déduire que toute fonction φ de classe C^2 à support dans l'ouvert $]0, 1[$ est l'image par T de $f = (x\varphi'(x))'/x$, et que T est injectif ; montrer que $\int_0^1 (\mathrm{T}f)(x) f(x)\,x\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 (\mathrm{F}'(x))^2\,x\,\mathrm{d}x \leq 0$.

d. Diagonaliser T en montrant que les fonctions propres f doivent vérifier une certaine équation différentielle, avec les conditions au bord $f(1) = 0$ et f bornée au voisinage du point 0 (on devra considérer l'équation satisfaite par $x \to f(x/\mu)$, $\mu > 0$ bien choisi).

Exercice 15. On désigne par K un sous-ensemble convexe compact non vide de l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ des suites *réelles* $x = (x_n)_{n \geqslant 0}$ de carré sommable, et on définit par récurrence

$$\lambda_0 = \max\{x_0 : x \in \mathrm{K}\}, \quad \lambda_{n+1} = \max\{x_{n+1} : x \in \mathrm{K},\ x_0 = \lambda_0, \ldots, x_n = \lambda_n\}.$$

a. Montrer qu'il existe un point $y \in \mathrm{K}$ tel que $y_n = \lambda_n$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que y est un point extrémal de K (si $y = (y_1 + y_2)/2$ et $y_1, y_2 \in \mathrm{K}$, alors $y_1 = y_2 = y$).

b. Soit F un fermé de K tel que $y \notin \mathrm{F}$; montrer qu'il existe n et $\varepsilon > 0$ tels que F ne contienne aucun point f tel que

$$\forall j \in \{0, \ldots, n\}, \quad f_j > \lambda_j - \varepsilon.$$

Montrer que y n'appartient pas à l'adhérence de l'enveloppe convexe de F.
Indication : l'ensemble F est contenu dans la réunion des $n+1$ convexes compacts G_j formés des points x de K tels que $x_j \leq \lambda_j - \varepsilon$; exprimer chaque élément de conv(F) comme combinaison convexe de points des différents G_j, puis passer à l'adhérence.

c. On suppose donné un groupe G de bijections affines continues de K sur K, compact comme sous-ensemble de l'espace topologique C(K, K) des applications continues de K dans K ; on suppose qu'aucun sous-ensemble convexe fermé de K n'est invariant par tous les éléments de G (l'ensemble K est un convexe fermé *minimal invariant*).

Montrer que y appartient à l'orbite $\{gx_0 : g \in \mathrm{G}\}$ de tout élément x_0. Montrer que K est réduit à un point.
Indication : si $x_0 \neq x_1$, considérer l'orbite de $(x_0 + x_1)/2$.

d. On suppose donné un groupe compact G de bijections affines continues d'un convexe compact C non vide de $\ell^2(\mathbb{N})$; montrer qu'il existe un point $x_0 \in \mathrm{C}$ qui est fixe pour tous les éléments de G (cas particulier d'un *théorème de point fixe de Kakutani*).

Exercice 16 : *formule d'inversion de Lagrange*. On suppose que f est holomorphe dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. On sait que f admet une fonction réciproque holomorphe g dans un voisinage de 0,

$$g(w) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n w^n$$

qui vérifie donc $g(0) = 0$ et $g(f(z)) = z$ pour z voisin de 0. On pose $f(z) = z/p(z)$ avec p holomorphe non nulle au voisinage de 0 ; montrer la formule de Lagrange, qui dit que

$$b_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (p(z))^n \Big|_{z=0}$$

pour tout $n \geq 1$.
Indication : soit γ_0 le parcours d'un petit cercle centré en 0, et soit $\gamma_1 = f \circ \gamma_0$; partir de la formule

$$b_n = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\gamma_1} \frac{g(w)}{w^{n+1}}\, dw$$

et la transformer par le changement de variable $w = f(z)$ en une intégrale sur γ_0. On aura besoin de noter en route que $f(z)^{-n} - nzf'(z)f(z)^{-n-1}$ est une dérivée, donc a une intégrale nulle sur γ_0.

Appliquer la formule d'inversion au cas $f(z) = z\,\mathrm{e}^z$ (calculer les coefficients de g, et le rayon de convergence de la série obtenue ; cette fonction g est la *fonction* W *de Lambert*, nommée d'après Johann Heinrich Lambert, mathématicien suisse du 18ième).