Révisions d'exercices

Prépa agreg, Analyse, 2009-2010. Exercices, feuille 1

Exercice 3. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts (qu'on peut même supposer deux à deux disjoints).

Exercice 5. On rappelle que la lim sup d'une suite de sous-ensembles (A_n) d'un ensemble Ω est définie par

$$\limsup_n \mathrm{A}_n = \bigcap_n \bigcup_{m \geqslant n} \mathrm{A}_m \subset \Omega.$$

Montrer qu'un ensemble $\mathrm{X} \subset \mathbb{R}$ est négligeable (pour la mesure de Lebesgue λ) si et seulement s'il existe une suite d'intervalles (I_n) telle que

$$\sum |\mathrm{I}_n| < +\infty \quad \text{et} \quad \mathrm{X} \subset \limsup_n \mathrm{I}_n$$

(on a noté $|\mathrm{I}|$ la longueur d'un intervalle I ; on rappelle qu'un sous-ensemble X de $\mathbb{R}$ est λ-négligeable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert V de $\mathbb{R}$ contenant X et tel que $\lambda(\mathrm{V}) < \varepsilon$; on pourra comparer le résultat de cet exercice au lemme de Borel-Cantelli).
Indication. Utiliser l'exercice 3 ; ensuite, on pourra trouver une suite double d'intervalles $\mathrm{J}_{k,\ell}$ telle que $\mathrm{X} \subset \cup_\ell \mathrm{J}_{k,\ell}$ pour tout k, puis énumérer $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Exercice 9. Calculer

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 11. Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, positive, paire avec $\widehat{f}$ de classe C^2, alors

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

(c'est une sorte de réciproque de la question *b.* de l'exercice précédent, pour $k = 2$).

Exercice 14. On suppose que f est une fonction réelle dérivable en tout point de $\mathbb{R}$, et que sa dérivée f' est bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tous $a < b$, on a

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a).$$

Étendre le résultat au cas d'une fonction f, lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et admettant une dérivée $f'(x)$ pour presque tout x.

Prépa agreg, Analyse, 2009-2010. Exercices, feuille 2

Exercice 1. On suppose que f est une fonction réelle croissante sur $\mathbb{R}$, et dérivable en presque tout point de $\mathbb{R}$ (pour la mesure de Lebesgue). Montrer que f' est une fonction Lebesgue-mesurable (définie presque partout) ; montrer que pour tous $a < b$, on a

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t \leq f(b) - f(a)$$

(on pourra se contenter du cas un peu plus simple où f est aussi continue).
Remarque : d'après un théorème de Lebesgue, toute fonction croissante sur $\mathbb{R}$ est dérivable presque partout : l'hypothèse de dérivabilité donnée dans l'exercice est en fait automatiquement satisfaite.

Exercice 4. On munit $\mathbb{R}^d$ de la norme euclidienne $x \to \|x\|$, et on désigne par v_d le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$ pour la mesure de Lebesgue. Si f est une fonction borélienne ≥ 0 sur $[0, +\infty[$, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\|x\|)\,\mathrm{d}x = d\,v_d \int_0^{+\infty} f(r)\,r^{d-1}\,\mathrm{d}r.$$

Indication. On pourra « calculer » la mesure image de la mesure de Lebesgue par l'application $x \to \|x\|$.

Calculer v_d en utilisant $f(r) = \mathrm{e}^{-r^2/2}$ dans la formule précédente (et la fonction Γ).

Exercice 6. Si f et g sont intégrables sur $\mathbb{R}$ posons

$$\mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{G}(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que pour tous $a < b$ réels on a

$$\int_a^b \mathrm{F}(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \big[\mathrm{F}\,\mathrm{G}\big]_a^b - \int_a^b f(t)\mathrm{G}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 9. Pour $0 < \theta < \pi/2$ on considère la partie de $\mathbb{C}$ définie par

$$\Omega_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(1-z)| < \theta,\ |1-z| < \cos\theta\}.$$

a. Montrer que Ω_θ est contenu dans le disque unité, et plus précisément

$$|z|^2 < 1 - |1-z|\cos\theta$$

pour tout $z \in \Omega_\theta$.

b. On suppose que $\sum a_n$ est une série convergente à termes complexes, et on pose pour $|z| < 1$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad \mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Évaluer $f(z) - \mathrm{S}$ en introduisant les restes $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$ (transformation d'Abel). Borner la quantité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |z^n - z^{n+1}|$$

lorsque $z \in \Omega_\theta$ et en déduire que $f(z)$ tend vers S quand z tend vers 1 par valeurs dans le domaine Ω_θ.

c. Si les séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ sont convergentes ainsi que la série produit $\sum c_n$, montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\Big).$$

Exercice 10. Soit φ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$; montrer que la fonction

$$x \to \frac{\varphi(x)}{x^2}$$

convenablement prolongée en 0, est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Indication : écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, et transformer l'expression du reste intégral.

Exercice 1. Montrer que pour tout x tel que $0 < x < 2\pi$, on a

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

Exercice 3. On donne un paramètre réel ou complexe $a \notin \mathbb{Z}$, et on désigne par f_a l'unique fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ qui vérifie

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \quad f_a(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ax}\,.$$

Expliciter le résultat obtenu en appliquant le théorème de convergence de Dirichlet à la fonction f_a au point $x = \pi$.

Exercice 8. Déterminer les racines du polynôme

$$\mathrm{P}_{n-1} = \frac{1}{n}\bigl(\mathrm{X}^n - (\mathrm{X}-1)^n\bigr) = \mathrm{X}^{n-1} - \frac{n-1}{2}\,\mathrm{X}^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{6}\,\mathrm{X}^{n-3} + \cdots$$

puis calculer la somme $\sigma_2(n)$ des carrés des racines grâce aux relations entre coefficients et racines. Que trouve-t-on quand $n \to +\infty$, en comparant les deux expressions trouvées pour $n^{-2}\sigma_2(n)$?

Exercice 15. *Dans cet exercice, on ne suppose pas connue la théorie des séries de Fourier ; au contraire, il s'agit de proposer une preuve un peu différente pour la densité des polynômes trigonométriques. L'étudiant attentif pourra y voir une variante d'une démonstration courante du théorème de Dirichlet (qui lui aussi, implique la densité des polynômes trigonométriques).*

a. On désigne par X l'espace vectoriel des fonctions 2π-périodiques de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes. Montrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathrm{X}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\varphi)$ converge absolument ; on peut donc poser

$$\ell(\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\varphi)\,;$$

vérifier que ℓ est linéaire sur X.

b. Si $\psi \in \mathrm{X}$ et si on définit φ par $\varphi(x) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - 1)\,\psi(x)$, montrer que $\ell(\varphi) = 0$.

c. Si φ est 2π-périodique de classe C^3, montrer que la fonction ψ définie pour $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ par

$$\varphi(x) = \varphi(0) + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - 1)\,\psi(x)$$

se prolonge en un élément $\psi \in \mathrm{X}$.

d. Si φ est 2π-périodique de classe C^3, montrer que

$$\varphi(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\varphi), \quad \text{puis} \quad \varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\varphi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que l'espace des polynômes trigonométriques est dense dans l'espace des fonctions continues 2π-périodiques muni de la norme uniforme.

Exercice 1. On considère une fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, nulle hors de $[-\pi, \pi]$; on considère aussi la fonction 2π-périodique g_a définie sur $\mathbb{R}$ par $g_a(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax}$ quand $\pi \le x < \pi$, où a est un paramètre réel. En utilisant la série de Fourier de g_a, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n+a)|^2.$$

En déduire que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(t)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

Si on suppose de plus que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, à support dans $[-\pi, \pi]$, modifier la méthode précédente pour retrouver la formule d'inversion de Fourier.

Exercice 4 : *équirépartition modulo* 1. Soient k un nombre entier et $\alpha \in \mathbb{R}$ un nombre irrationnel ; déterminer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}kj\alpha}.$$

On considère une fonction f continue et 1-périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(j\alpha) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Généraliser aux sommes $n^{-2}\sum_{j,k=1}^{n} g(j\alpha, k\beta)$, dans le cas d'un couple (α, β) et d'une fonction g continue de deux variables telle que $g(x+1, y) = g(x, y+1) = g(x, y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 8. On considère une fonction F_0 sur $\mathbb{R}$, lipschitzienne de constante C et à support contenu dans un intervalle fermé borné $[a, b]$; on introduit d'autre part une suite $u_1, u_2, \ldots$ de réels > 0 telle que $\sum_n u_n < +\infty$. Pour tout entier $n \ge 1$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}_n(x) = \Big(\mathrm{F}_{n-1} * (u_n^{-1}\mathbf{1}_{[0,u_n]})\Big)(x) = \frac{1}{u_n}\int_{x-u_n}^{x} \mathrm{F}_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. Montrer que F_n est lipschitzienne de constante C, et que son support est contenu dans l'intervalle $[a, b + u_1 + \cdots + u_n]$. Montrer que F_n est de classe C^n sur $\mathbb{R}$. Vérifier que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{F}_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{F}_0(t)\,\mathrm{d}t.$$

b. Montrer que $|\mathrm{F}_n(x) - \mathrm{F}_{n-1}(x)| \le \mathrm{C}u_n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (cette inégalité n'est pas optimale mais nous suffira).

c. Montrer que F_n converge uniformément vers une fonction F, et que F est de classe C^∞ à support compact (*indication* : pour prouver la dérivabilité, remplacer F_0 par F_1', puis par F_2'', ...). Vérifier que l'intégrale de F est égale à celle de F_0 et que le support de F est contenu dans l'intervalle $[a, b + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n]$.

Exercice 10 : *base de Shannon sur* $\mathbb{R}$.

a. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ on considère l'intervalle $\mathrm{I}_n = (2n-1, 2n+1)$. Montrer que le système des fonctions

$$f_{n,k}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_{\mathrm{I}_n}(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi k x}, \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

b. Expliciter la base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ obtenue par transformation de Fourier.

c. On considère le sous-espace fermé de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ formé des fonctions dont la transformée de Fourier est nulle en dehors de $[-1, 1]$. Déduire de la question précédente une base hilbertienne pour ce sous-espace.

Exercice 13. On suppose que μ est une mesure infinie sur $(\Omega, \mathcal{A})$, et on désigne par X l'espace vectoriel des fonctions réelles $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mu) \cap \mathrm{L}^4(\Omega, \mu)$.

a. Montrer que X est complet pour la norme définie par $\|f\|_{\mathrm{X}} = \|f\|_2 + \|f\|_4$.

b. Montrer que toute fonction $g \in \mathrm{L}^2 + \mathrm{L}^{4/3}$, c'est-à-dire de la forme $g = g_0 + g_1$ avec $g_0 \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mu)$ et $g_1 \in \mathrm{L}^{4/3}(\Omega, \mu)$, définit une forme linéaire ξ continue sur X par la formule

$$\forall f \in \mathrm{X}, \quad \xi(f) = \int_\Omega f g \,\mathrm{d}\mu.$$

c. On suppose que ℓ est une forme linéaire continue sur X (muni de la norme précédente) et on définit une fonction réelle φ sur X en posant

$$\forall f \in \mathrm{X}, \quad \varphi(f) = \int_\Omega (f^2 + f^4)\,\mathrm{d}\mu - \ell(f)\,;$$

montrer que

$$m = \inf\{\varphi(f) : f \in \mathrm{X}\} > -\infty.$$

Vérifier que pour toutes $f, h \in \mathrm{X}$

$$\frac{1}{2}\big(\varphi(f+h) + \varphi(f-h)\big) - \varphi(f) \geq \int_\Omega (h^2 + h^4)\,\mathrm{d}\mu.$$

En déduire que le diamètre du fermé $\mathrm{F}_\varepsilon = \{\varphi \leq m + \varepsilon\} \subset \mathrm{X}$ tend vers 0 quand $\varepsilon > 0$ tend vers 0, puis que φ atteint son minimum m en un point unique $f_0 \in \mathrm{X}$.

Montrer que la forme linéaire ℓ provient de la fonction $g = 2f_0 + 4f_0^3 \in \mathrm{L}^2 + \mathrm{L}^{4/3}$.

d. Pour $2 < p < 4$, montrer que X s'injecte continûment dans $\mathrm{L}^p(\Omega, \mu)$, avec image dense. En déduire que les formes linéaires continues sur l'espace $\mathrm{L}^p(\Omega, \mu)$ proviennent des fonctions de $\mathrm{L}^q(\Omega, \mu)$, $1/q + 1/p = 1$.

Prépa agreg, Analyse, 2009-2010. Exercices, feuille 5

Exercice 5 : *théorème de Fejér sur* $\mathbb{R}$.

a. Déterminer la transformée de Fourier de la fonction paire f sur $\mathbb{R}$ qui vaut

$$f(x) = (2-x)/4 \ \text{ si } \ 0 \leq x \leq 2, \quad f(x) = 0 \ \text{ si } \ x \geq 2.$$

b. On pose

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2,$$

et $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$ pour tout entier $n \geq 1$. Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, exprimer la transformée de Fourier de $f * \varphi_n$ à partir de celle de f.

c. Montrer que si f est bornée, intégrable sur $\mathbb{R}$ et continue au point x, on a

$$f(x) = \lim_n \frac{1}{2\pi} \int_{-2n}^{2n} \widehat{f}(y)\Big(1 - \frac{|y|}{2n}\Big)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y.$$

d. Énoncer et démontrer un théorème de convergence dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, $p = 1$ ou $p = 2$, analogue au théorème de Fejér pour les séries de Fourier.

Exercice 8. On suppose que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$ existe pour tout $z \in \mathbb{C}$; on suppose de plus que la partie réelle $g(z) = \operatorname{Re} f(z)$ vérifie une majoration de la forme

$$\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \exists \mathrm{M},\ \forall z \in \mathbb{C}, \quad |g(z)| \le \mathrm{M}\,(1 + |z|^{\mathrm{N}}).$$

En déduire que f est un polynôme de degré $\le \mathrm{N}$.
Indication : pour r tendant vers l'infini, étudier les coefficients de la série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par $\theta \in [0, 2\pi] \to g(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})$.

Exercice 13. Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

à partir de la détermination du logarithme complexe $\ln z$ sur l'ouvert

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \le 0\}$$

qui est donnée par $\ln(1 - z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} z^n/n$ quand $|z| < 1$.
Indication : on rappelle que pour cette détermination, si $r > 0$ et $-\pi < \theta < \pi$, alors $\ln(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}) = \ln r + \mathrm{i}\,\theta$; appliquer à $z = r\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\,x}$, avec $0 < r < 1$, r tendant vers 1.

Exercice 14 : *polynômes d'Hermite*. On pose pour tout entier $n \ge 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{H}_n(x) = (-1)^n\,\mathrm{e}^{x^2}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big(\mathrm{e}^{-x^2}\big).$$

a. Montrer que H_n est un polynôme de degré n. Calculer H_0, H_1 et H_2.
b. Montrer que pour tout $n \ge 0$, la fonction $h_n : x \to \mathrm{H}_n(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ est un vecteur propre de la transformation de Fourier (on pourra utiliser une relation de récurrence entre h'_n, h_n et h_{n+1}, et les rapports entre Fourier et dérivation). Quelles sont les valeurs propres possibles pour la transformation de Fourier $\mathcal{F}$, agissant sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$?
c. Soit φ la fonction définie par $\varphi(z) = \mathrm{e}^{-z^2}$; on rappelle que $\varphi^{(n)}(x_0)$ s'exprime à partir des polynômes (H_n). Exprimer le développement en série de Taylor de $t \to \varphi(x_0 - t)$. En déduire la *fonction génératrice* des polynômes d'Hermite,

$$\mathrm{e}^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{H}_n(x)\,\frac{t^n}{n!}\cdot$$

Utiliser la fonction génératrice pour retrouver le résultat précédent sur les vecteurs propres de $\mathcal{F}$.

Prépa agreg, Analyse, 2009-2010. Exercices, feuille 6

Exercice 1. Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$; calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

en utilisant l'holomorphie et un contour adapté (on fera apparaître la fonction Γ en introduisant la demi-droite imaginaire $\mathbb{R}_+\,\mathrm{i}$).

Exercice 3. On désigne par B une matrice complexe de taille $d \times d$, et par K l'ensemble de ses valeurs propres. On considère un chemin fermé γ dans $\mathbb{C}$ qui ne rencontre pas K et on lui associe la matrice

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma (z\mathrm{I}_d - \mathrm{B})^{-1}\, dz.$$

a. Montrer que pour r assez grand et $\gamma = \gamma_r$ (le parcours positif habituel du cercle de rayon r centré en 0), la matrice P est égale à la matrice unité I_d.

b. On suppose que γ parcourt (une fois) un cercle dans le sens direct, et que ce cercle contient exactement une valeur propre λ de B. Montrer que la matrice P est un projecteur sur le sous-espace caractéristique de B associé à la valeur propre λ.

c. Si γ est un chemin fermé qui ne rencontre pas K, montrer que la matrice P est une combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs de projecteurs caractéristiques.

Exercice 6 : distance de Hausdorff. Soient (X, d) un espace métrique non vide et x_0 un point fixé dans X ; on désignera par $\mathcal{F}_b$ l'ensemble des fermés F non vides de X qui sont *bornés pour la distance* d, c'est-à-dire tels que $\sup_{y\in \mathrm{F}} d(y, x_0) < +\infty$. À chaque fermé $\mathrm{A} \in \mathcal{F}_b$ on associe la fonction φ_A définie sur X par

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad \varphi_\mathrm{A}(x) = d(x, \mathrm{A}) - d(x, x_0) = \inf\{d(x, a) - d(x, x_0) : a \in \mathrm{A}\}.$$

a. Vérifier que φ_A est bornée sur X. Montrer que pour tous $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{F}_b$ on a

$$\|\varphi_\mathrm{A} - \varphi_\mathrm{B}\|_\infty = \max\bigl(\sup\{d(a, \mathrm{B}) : a \in \mathrm{A}\},\, \sup\{d(b, \mathrm{A}) : b \in \mathrm{B}\}\bigr).$$

En déduire que la quantité précédente, qu'on notera $h(\mathrm{A}, \mathrm{B})$, est une distance sur l'ensemble $\mathcal{F}_b$ (c'est la *distance de Hausdorff* entre sous-ensembles fermés).

b. On suppose que (X, d) est complet ; montrer que $\mathcal{F}_b$ est complet pour la distance de Hausdorff. *Indication* : considérer une suite de Cauchy (A_k) telle que $h(\mathrm{A}_k, \mathrm{A}_{k+1}) < 2^{-k-1}$ pour tout $k \geq 0$, et l'ensemble A des points $a \in \mathrm{X}$ qui sont limite d'une suite (a_k) avec $a_k \in \mathrm{A}_k$ pour tout $k \geq 0$. Montrer que tout point $a_k \in \mathrm{A}_k$ est à distance $< 2^{-k}$ d'un point de A, et que tout point $a \in \mathrm{A}$ est à distance $< 2^{-k} + \varepsilon$ d'un point de A_k, pour tout $\varepsilon > 0$.

c. On suppose que (X, d) est compact ; montrer que $\mathcal{F}_b$ est compact pour la distance de Hausdorff.

Exercice 14. On rappelle que la fonction de Bessel J_0 peut être exprimée par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{J}_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

La fonction J_0 admet une infinité de zéros réels > 0 qui interviendront dans cet exercice, et qu'on notera $z_1 < \ldots < z_k < \ldots$.

a. Vérifier que $x\,\mathrm{J}_0''(x) + \mathrm{J}_0'(x) + x\,\mathrm{J}_0(x) = 0$ pour tout x ; chercher une autre solution $x \to y(x)$ sur $]0, z_1[$ de l'équation différentielle (de Bessel) $x\,y'' + y' + x\,y = 0$, en l'exprimant sous la forme $y(x) = u(x)\mathrm{J}_0(x)$; vérifier que $x\mathrm{J}_0(x)^2 u'(x)$ est constante et en déduire que les solutions sur $]0, z_1[$ qui restent bornées au voisinage de 0 sont proportionnelles à J_0. Si y vérifie l'équation de Bessel et si μ est un réel > 0, quelle est l'équation vérifiée par la fonction z définie par $z(x) = y(\mu x)$?

b. On désigne par ν la mesure à densité $\mathrm{d}\nu(t) = t\,\mathrm{d}t$ sur l'intervalle $[0, 1]$, et on définit un opérateur linéaire T sur l'espace réel $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2([0, 1], \nu)$ en posant pour toute $f \in \mathrm{H}$

$$\forall s \in]0, 1], \quad (\mathrm{T}f)(s) = \ln(s) \int_0^s f(t)\,t\,\mathrm{d}t + \int_s^1 \ln(t) f(t)\,t\,\mathrm{d}t.$$

Vérifier que T est borné, hermitien, compact ; montrer que $\mathrm{T}f$ se prolonge en fonction continue sur $[0, 1]$.

c. Dans le cas où f est continue sur $[0, 1]$, montrer que $\mathrm{F} = \mathrm{T}f$ est deux fois dérivable sur l'ouvert $]0, 1[$ et y vérifie $(x\mathrm{F}'(x))' = xf(x)$. En déduire que toute fonction φ de classe C^2 à support dans l'ouvert $]0, 1[$ est l'image par T de $f = (x\varphi'(x))'/x$, et que T est injectif ; montrer que $\int_0^1 (\mathrm{T}f)(x)f(x)\,x\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 (\mathrm{F}'(x))^2\,x\,\mathrm{d}x \le 0$.

d. Diagonaliser T en montrant que les fonctions propres f doivent vérifier une certaine équation différentielle, avec les conditions au bord $f(1) = 0$ et f bornée au voisinage du point 0 (on devra considérer l'équation satisfaite par $x \to f(x/\mu)$, $\mu > 0$ bien choisi).

Exercice 16 : *formule d'inversion de Lagrange*. On suppose que f est holomorphe dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, que $f(0) = 0$ et $f'(0) \ne 0$. On sait que f admet une fonction réciproque holomorphe g dans un voisinage de 0,

$$g(w) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n w^n$$

qui vérifie donc $g(0) = 0$ et $g(f(z)) = z$ pour z voisin de 0. On pose $f(z) = z/p(z)$ avec p holomorphe non nulle au voisinage de 0 ; montrer la formule de Lagrange, qui dit que

$$b_n = \frac{1}{n!}\,\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\,(p(z))^n\Big|_{z=0}$$

pour tout $n \ge 1$.

Indication : soit γ_0 le parcours d'un petit cercle centré en 0, et soit $\gamma_1 = f \circ \gamma_0$; partir de la formule

$$b_n = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\gamma_1} \frac{g(w)}{w^{n+1}}\,dw$$

et la transformer par le changement de variable $w = f(z)$ en une intégrale sur γ_0. On aura besoin de noter en route que $f(z)^{-n} - nzf'(z)f(z)^{-n-1}$ est une dérivée, donc a une intégrale nulle sur γ_0.

Appliquer la formule d'inversion au cas $f(z) = z\,\mathrm{e}^z$ (calculer les coefficients de g, et le rayon de convergence de la série obtenue ; cette fonction g est la *fonction* W *de Lambert*, nommée d'après Johann Heinrich Lambert, mathématicien suisse du 18ième).