cours 5, le 1er décembre 2009

Le cas $\mathrm{L}^1 * \mathrm{L}^p$, $1 < p \leq \infty$

Remarque : une variante de l'inégalité de Jensen avec des fonctions positives. *Si μ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, si f est une fonction $\mathcal{A}$-mesurable ≥ 0 sur Ω (c'est-à-dire à valeurs dans $[0, +\infty]$) et si $1 \leq p < +\infty$, on a*

$$\Bigl(\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu\Bigr)^p \leq \int_\Omega f^p \, \mathrm{d}\mu,$$

où on a posé

$$(+\infty)^p = \lim_{n \nearrow +\infty} n^p = +\infty.$$

Preuve. — On passe par $f_n = \inf(f, n)$, qui est intégrable et tend en croissant vers f ; comme $u \in \mathbb{R} \to |u|^p$ est convexe, on obtient par le cas usuel de Jensen, pour tout n

$$\Bigl(\int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu\Bigr)^p \leq \int_\Omega f_n^p \, \mathrm{d}\mu\,;$$

on applique ensuite deux fois le théorème de convergence monotone (et le prolongement « par continuité croissante » de la fonction convexe $u \to |u|^p$ au point $+\infty$),

$$\Bigl(\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu\Bigr)^p = \lim_n \Bigl(\int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu\Bigr)^p \leq \lim_n \int_\Omega f_n^p \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f^p \, \mathrm{d}\mu.$$

Remarque. On peut obtenir Hölder à partir de Jensen pour la fonction $u \to |u|^p$. Il suffit de prouver le cas $f, g \geq 0$; dans le cas où $g > 0$ est dans $\mathrm{L}^q(\Omega, \mu)$, $1/p + 1/q = 1$, posons

$$\mathrm{J} = \int_\Omega g^q \, \mathrm{d}\mu > 0$$

et considérons la probabilité $\mathrm{d}\nu(x) = \mathrm{J}^{-1} g^q(x) \, \mathrm{d}\mu(x)$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On a

$$\Bigl(\mathrm{J}^{-1} \int_\Omega f g \, \mathrm{d}\mu\Bigr)^p = \Bigl(\int_\Omega f g^{1-q} \, \mathrm{d}\nu\Bigr)^p \leq \int_\Omega f^p g^{p-pq} \, \mathrm{d}\nu = \mathrm{J}^{-1} \int_\Omega f^p \, \mathrm{d}\mu,$$

donc

$$\int_\Omega f g \, \mathrm{d}\mu \leq \mathrm{J}^{1-1/p} \Bigl(\int_\Omega f^p \, \mathrm{d}\mu\Bigr)^{1/p} = \Bigl(\int_\Omega f^p \, \mathrm{d}\mu\Bigr)^{1/p} \Bigl(\int_\Omega g^q \, \mathrm{d}\mu\Bigr)^{1/q},$$

ce qu'il fallait démontrer. Quand g n'est pas > 0 partout, on limite l'intégrale à l'ensemble $\Omega_0 = \{g > 0\}$.

Proposition-définition. *Soient $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$, avec $1 \le p \le \infty$; pour presque tout x, la fonction $t \to f(x-t)g(t)$ est intégrable ; la fonction $f * g$, définie presque partout, est dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$, et*

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \, \|g\|_p.$$

Preuve. — Le cas $\mathrm{L}^1 * \mathrm{L}^\infty$ est facile et laissé au lecteur. Si $f \in \mathrm{L}^1$ et $g \in \mathrm{L}^p$ sont positives, posons

$$\mathrm{I} = \int_{\mathbb{R}^d} f.$$

Si $\mathrm{I} = 0$, la fonction f est presque partout nulle, ce qui entraîne que $(f * g)(x) = 0$ pour tout x, donc $\|f * g\|_p = 0$ et ce cas est évident ; sinon, on a $\mathrm{I} > 0$ et on peut utiliser l'inégalité de Jensen (étendue) pour la probabilité $\mathrm{d}\nu(t) = f(t)\,\mathrm{d}t/\mathrm{I}$ sur $\mathbb{R}^d$ et pour la fonction convexe $u \in \mathbb{R} \to |u|^p$, obtenant ainsi

$$\Bigl(\int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t)\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{I}}\Bigr)^p = \Bigl(\int_{\mathbb{R}^d} g(x-t)\,\mathrm{d}\nu(t)\Bigr)^p \le \int_{\mathbb{R}^d} g(x-t)^p\,\mathrm{d}\nu(t) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x-t)^p f(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{I}}\cdot$$

Par une deuxième intégration, et en utilisant Fubini positif, on obtient

$$\mathrm{I}^{-p} \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)^p = \int_{\mathbb{R}^d} \Bigl(\int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t)\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{I}}\Bigr)^p \mathrm{d}x \le$$

$$\le \iint g(x-t)^p f(t)\,\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{I}} = \Bigl(\int_{\mathbb{R}^d} g(x-t)^p\,\mathrm{d}x\Bigr)\Bigl(\int_{\mathbb{R}^d} f(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{I}}\Bigr) = \int_{\mathbb{R}^d} g^p(y)\,\mathrm{d}y,$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f * g)^p \le \mathrm{I}^p \int_{\mathbb{R}^d} g^p = \Bigl(\int_{\mathbb{R}^d} f\Bigr)^p \int_{\mathbb{R}^d} g^p,$$

d'où le résultat dans le cas positif. Le fait que $f * g$ soit dans L^p prouve en particulier que $f * g$ (partout définie à valeurs dans $[0, +\infty]$) est finie presque partout, c'est-à-dire que : pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^d} f(u)g(x-u)\,\mathrm{d}u < +\infty.$$

Dans le cas général, on passe par la majoration par les modules, qui montre d'abord que $t \to |f(x-t)|\,|g(t)|$ est intégrable pour presque tout x d'après le cas positif, donc $f*g$ est définie presque partout, et la majoration $|f * g| \le |f| * |g|$ donne ensuite l'inégalité $\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \, \|g\|_p$.

L'inégalité $\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \, \|g\|_p$ est vraie aussi dans les cadres $\mathbb{Z}$ ou bien $\mathbb{T}$. Dans le cas périodique, la preuve de cette inégalité requiert la même technique, mais on est au moins sûr dès le début que l'écriture $f * g$ a un sens, parce que $\mathrm{L}^p(\mathbb{T}) \subset \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ et que le cas $\mathrm{L}^1 * \mathrm{L}^1$ a déjà été traité. Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$, l'existence d'une convolution $\mathrm{L}^1 * \mathrm{L}^p$ n'est pas un cas particulier du cas $\mathrm{L}^1 * \mathrm{L}^1$.

Le cas $\mathrm{L}^q * \mathrm{L}^p$ *avec* $1/p + 1/q = 1$

Dans le cas où $f \in \mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)$, $g \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ avec $1/p + 1/q = 1$, on peut définir la convolée $f * g$ *en tout point* $x \in \mathbb{R}^d$ par la formule usuelle

$$(1) \qquad (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

En effet, $t \to f(x-t)g(t)$ est intégrable pour tout x d'après Hölder, comme produit d'une fonction L^q par une fonction L^p ; plus directement, on peut remonter à l'ingrédient élémentaire de la preuve de Hölder, l'inégalité de variables réelles $u, v \ge 0$

$$uv \le \frac{u^q}{q} + \frac{v^p}{p}$$

(qui se démontre par une simple étude de fonction sur $[0, +\infty[$) et l'appliquer à

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t)g(t)|\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t)|^q\,\mathrm{d}t + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^d} |g(t)|^p\,\mathrm{d}t < +\infty.$$

Si on utilise l'inégalité de Hölder, on trouve la majoration

$$(2) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |(f * g)(x)| \le \|f\|_q\,\|g\|_p.$$

On verra plus loin que cette convolée $f * g$, $f \in \mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)$, $g \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et $1/p + 1/q = 1$, est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$.

Exercice 7 feuille 4 : l'inégalité de convolution de Young étend les cas $\mathrm{L}^1 * \mathrm{L}^p \subset \mathrm{L}^p$ avec $1 \le p \le \infty$, et $\mathrm{L}^q * \mathrm{L}^p \subset \mathrm{L}^\infty$ avec $1/p + 1/q = 1$: si $p, q, r \ge 1$ et $1/p + 1/q = 1 + 1/r$, on a $\mathrm{L}^q * \mathrm{L}^p \subset \mathrm{L}^r$ et, plus précisément, l'inégalité $\|f * g\|_r \le \|f\|_p\,\|g\|_q$.

Localisation de la convolée $f * g$

On dira qu'une fonction f sur $\mathbb{R}^d$ est *portée* par un ensemble $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^d$ si f est nulle en dehors de A,

$$\big(f(x) \ne 0\big) \Rightarrow (x \in \mathrm{A}).$$

Lemme. *Si f est mesurable sur $\mathbb{R}^d$ et portée par un ensemble $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^d$, si g est mesurable et portée par* B *et si*

$$t \to f(x-t)g(t)$$

est intégrable pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, alors $f * g$, définie partout par la formule (1)*, est portée par* $\mathrm{A} + \mathrm{B}$*, la somme de Minkowski de* A *et* B*,*

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \{a + b : a \in \mathrm{A}, b \in \mathrm{B}\}.$$

Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ (admet un représentant qui) est une fonction portée par un ensemble $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^d$ et si $g \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$, est portée par B*, alors $f * g$, définie presque partout, admet un représentant porté par* $\mathrm{A} + \mathrm{B}$.

Preuve. — Soit x donné ; si la fonction $h_x : t \to f(x-t)g(t)$ est intégrable et si

$$\int_{\mathbb{R}^d} h_x = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t \neq 0,$$

alors certainement la fonction h_x n'est pas la fonction nulle : il existe donc t_0 tel que

$$h_x(t_0) = f(x-t_0)g(t_0) \neq 0,$$

ce qui entraîne que $f(x-t_0) \neq 0$, $g(t_0) \neq 0$ donc $x - t_0 \in \mathrm{A}$, $t_0 \in \mathrm{B}$ et finalement, on a $x = (x-t_0) + t_0 \in \mathrm{A} + \mathrm{B}$.

Continuité des translations

Si f est une fonction sur $\mathbb{R}^d$, on considère la fonction $\tau_h f$, translatée de vecteur $h \in \mathbb{R}^d$,

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (\tau_h f)(x) = f(x-h).$$

On notera aussi $f_h = \tau_h f$ pour faire court. Par l'invariance de la mesure de Lebesgue, la translatée f_h est dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ quand f est dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et on a $\|f_h\|_p = \|f\|_p$ pour tout h et tout $p \geq 1$. On notera $|h|$ la norme euclidienne du vecteur h.

Lemme. *Si $1 \leq p < \infty$ et si f est dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$\|\tau_h f - f\|_p \to 0$$

quand $|h|$ tend vers 0.

Preuve. — On traite d'abord le cas où la fonction appartient à l'espace $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$ à support compact. On utilisera ensuite le fait que $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout p tel que $1 \leq p < \infty$. Comme le vecteur de translation $h \in \mathbb{R}^d$ va tendre vers 0, on peut se limiter à $|h| \leq 1$. Si g est continue et portée par le cube compact $[-a,a]^d$, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$, et si $|h| \leq 1$, la translatée g_h est portée par $[-a-1,a+1]^d$, donc $g_h - g$ est nulle en dehors de $[-a-1,a+1]^d$ et par conséquent

$$\|g_h - g\|_p^p = \int_{[-a-1,a+1]^d} |(g(x-h) - g(x)|^p\,\mathrm{d}x \leq \omega_g(|h|)^p\,(2a+2)^d$$

qui tend vers 0 avec h, puisque $g \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$; la fonction ω_g est le module de continuité de g,

$$\omega_g(\delta) = \sup\{|g(y) - g(x)| : |y-x| \leq \delta\}.$$

Si $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$ sont donnés, on approche f par g, continue à support compact, de façon que

$$\|f-g\|_p < \varepsilon/3, \quad \text{donc } \|f_h - g_h\|_p = \|(f-g)_h\|_p = \|f-g\|_p < \varepsilon/3\,;$$

pour la fonction $g \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$, on a vu qu'il existe $h_0 > 0$ tel que

$$|h| < h_0 \Rightarrow \|g_h - g\|_p < \varepsilon/3.$$

Par l'inégalité triangulaire, on voit que si $|h| < h_0$, on a

$$\|f_h - f\|_p \le \|f_h - g_h\|_p + \|g_h - g\|_p + \|g - f\|_p < \varepsilon,$$

ce qui termine la preuve.

Proposition 1. *Si $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in \mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)$ et si $1/p + 1/q = 1$, la convolée $f * g$ est uniformément continue (et bornée) sur $\mathbb{R}^d$.*

Preuve. — On a déjà vu que $f * g$ est définie en tout point, et bornée (Hölder, inégalité (2)). L'un des deux nombres p ou q est fini, par exemple $p < \infty$. D'après le lemme de continuité des translations, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|f_h - f\|_p < \varepsilon/(1 + \|g\|_q)$$

lorsque $|h| < \delta$. Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$ tels que $|y - x| < \delta$; si on pose $x = y + h$, on a $|h| < \delta$ et

$$\bigl|(f * g)(y) - (f * g)(x)\bigr| = \Bigl|\int_{\mathbb{R}^d} \bigl(f(x - h - t) - f(x - t)\bigr) g(t)\,\mathrm{d}t\Bigr| = \bigl|((f_h - f) * g)(x)\bigr|,$$

donc d'après (2)

$$\bigl|(f * g)(y) - (f * g)(x)\bigr| = \bigl|((f_h - f) * g)(x)\bigr| \le \|f_h - f\|_p\,\|g\|_q < \varepsilon.$$

Exercice 6, feuille 4 : un résultat de Steinhaus. Si $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^d$ est un borélien de mesure > 0, la différence (de Minkowski) $\mathrm{A} - \mathrm{A}$ est un voisinage de 0.

Régularisation : continuité, dérivabilité des convolées

La convolution $f * g$ hérite des « bonnes » propriétés de continuité, dérivabilité, que peut avoir *l'une des deux* fonctions f ou g. D'abord, un peu de continuité.

Proposition. *On suppose que $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le +\infty$, et que g est continue bornée sur $\mathbb{R}^d$; la convolée $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}^d$.*

Preuve. — Elle résulte de la continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, obtenue par Lebesgue dominée : la fonction sous l'intégrale de la définition (1),

$$h(x, t) = f(t)\,g(x - t)$$

est continue par rapport au paramètre x, et l'inégalité $|h(x, t)| \le \|g\|_\infty |f(t)|$ fournit un majorant intégrable (dans la variable d'intégration t) indépendant du paramètre x.

Dérivées directionnelles, dérivées partielles : si g est une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$, si $v \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur non nul, on définit la dérivée de g au point x dans la direction v par

$$(\mathrm{D}_v g)(x) = \lim_{s \to 0} \frac{g(x + sv) - g(x)}{s}\ ;$$

comme cas particulier, on a les dérivées partielles, pour $j = 1, \ldots, d$

$$\mathrm{D}_j := \frac{\partial}{\partial x_j} = \mathrm{D}_{e_j}$$

où $e_j = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, $j = 1, \dots, d$, est le $j$ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

Proposition 2. *On suppose que $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le +\infty$, et que g est mesurable bornée sur $\mathbb{R}^d$; un vecteur v étant fixé, on suppose que g admet en tout point une dérivée directionnelle $\mathrm{D}_v g$, bornée sur $\mathbb{R}^d$. Alors $f * g$ admet une dérivée directionnelle $\mathrm{D}_v(f * g)$ définie et continue sur $\mathbb{R}^d$, qui se calcule par la formule*

$$\mathrm{D}_v(f * g) = f * (\mathrm{D}_v g).$$

Preuve. — La fonction $\mathrm{D}_v g$ est mesurable, comme limite simple de suites de quotients de dérivation, qui sont mesurables, et elle est bornée par hypothèse, disons par M. La dérivée de $f*g$ au point x dans la direction v est la dérivée en 0 de la fonction de variable réelle

$$s \in \mathbb{R} \to (f * g)(x + sv) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) g(x + sv - t) \,\mathrm{d}t.$$

La dérivée par rapport au paramètre s de l'expression sous l'intégrale est

$$f(t)(\mathrm{D}_v g)(x + sv - t),$$

qui est majorée par $\mathrm{M}|f(t)|$ d'après l'hypothèse ; ce majorant, indépendant du paramètre s, est intégrable, ce qui permet de dériver sous le signe somme par rapport au paramètre s. La convolée $f * (\mathrm{D}_v g)$ est continue comme convolution $\mathrm{L}^1 * \mathrm{L}^\infty$.

Corollaire 1. *On suppose que $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le +\infty$, et que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$; on suppose que g et $\mathrm{D}_j g$ sont bornées sur $\mathbb{R}^d$, pour tout $j = 1, \dots, d$. Alors $f * g$ est de classe C^1 et ses dérivées partielles se calculent par la formule*

$$\mathrm{D}_j(f * g) = f * (\mathrm{D}_j g) ;$$

plus généralement, la dérivée directionnelle de $f * g$ se calcule, pour tout vecteur v, par la formule $\mathrm{D}_v(f * g) = f * (\mathrm{D}_v g)$.

Preuve. — Par la proposition précédente, toutes les dérivées partielles de $f * g$ existent et sont continues, donc $f * g$ est de classe C^1. Quand une fonction est de classe C^1, ses dérivées directionnelles se calculent par combinaison linéaire de dérivées partielles, d'où la généralisation.

Proposition. *On suppose que $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le +\infty$, et que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$, à support compact. Alors $f * g$ est de classe C^1 et toutes ses dérivées directionnelles se calculent par*

$$\mathrm{D}_v(f * g) = f * (\mathrm{D}_v g).$$

Preuve. — Elle fonctionne par décomposition-localisation, pour se ramener au cas du corollaire 1. On donne $r > 0$, assez grand pour que le *support de* g, défini par

$$\mathrm{supp}(g) = \overline{\{x : g(x) \ne 0\}},$$

vérifie

$$\mathrm{supp}(g) \subset \mathrm{B}(r) := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < r\}.$$

On désignera par $\mathrm{E}(r) = \{x : |x| \ge r\}$ *l'extérieur* de la boule $\mathrm{B}(r)$. On écrit

$$f = f_1 + f_2$$

avec

$$f_1 = \mathbf{1}_{\mathrm{B}(2r)}\, f, \quad f_2 = \mathbf{1}_{\mathrm{E}(2r)}\, f.$$

La fonction g, continue à support compact, est dans $\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)$ pour tout q, en particulier pour l'exposant conjugué de p, donc $f * g$ est définie et uniformément continue par la proposition 1. Pour la même raison, les convolutions $f_1 * g$ et $f_2 * g$ sont définies, et

$$f * g = f_1 * g + f_2 * g.$$

La fonction f_1 est intégrable comme produit de $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et de $\mathbf{1}_{\mathrm{B}(2r)} \in \mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)$, si on veut. D'après le corollaire 1, la première convolution $f_1 * g$ est de classe C^1, et ses dérivées directionnelles se calculent en dérivant sous le signe intégral. On va montrer que la deuxième convolution $f_2 * g$ est identiquement nulle dans $\mathrm{B}(r)$.

La fonction f_2 est portée par $\mathrm{A} = \mathrm{E}(2r)$ et g par $\mathrm{B} = \mathrm{B}(r)$, donc $f_2 * g$ est portée par $\mathrm{A} + \mathrm{B}$; par l'inégalité triangulaire, on a $|a+b| \geq |a| - |b| \geq r$ quand $a \in \mathrm{A}$, $b \in \mathrm{B}$, ce qui montre que $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{E}(2r) + \mathrm{B}(r)$ est contenu dans l'extérieur $\mathrm{E}(r)$. Donc $f_2 * g$ est portée par E_r, c'est-à-dire nulle sur $\mathrm{B}(r)$. Dans la boule $\mathrm{B}(r)$, on a donc $f * g = f_1 * g$, et $f_1 * g$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$ par le corollaire 1, avec $\mathrm{D}_v(f_1 * g) = f_1 * (\mathrm{D}_v g)$ pour tout v.

Si v est une direction, on voit de même que $f_2 * (\mathrm{D}_v g)$ est nulle dans $\mathrm{B}(r)$ (tout comme la fonction g, la fonction continue $\mathrm{D}_v g$ a son support contenu dans $\mathrm{B}(r)$, ce qui permet d'appliquer les mêmes arguments que pour $f_2 * g$) ; cela montre que la dérivée directionnelle $\mathrm{D}_v(f * g)$, égale dans $\mathrm{B}(r)$ à $\mathrm{D}_v(f_1 * g) = f_1 * (\mathrm{D}_v g)$, se calcule dans $\mathrm{B}(r)$ sous la forme $f * (\mathrm{D}_v g)$. Comme r est arbitrairement grand, on a bien obtenu le résultat de dérivabilité souhaité.

Approximation

On définit une *approximation de l'unité* (ou *approximation de l'identité*, ou *unité approchée*) sur $\mathrm{G} = \mathbb{R}^d$, ou bien dans le cas périodique $\mathrm{G} = \mathbb{T}$, ou dans d'autres cas de nature non discrète (la notion n'a pas beaucoup d'intérêt dans le cas de $\mathbb{Z}$, et aucun intérêt pour les groupes finis) ; on note d la distance invariante choisie sur le groupe, et μ la mesure de Haar. Une approximation de l'unité est une suite (f_n) de fonctions μ-intégrables sur G dont « la masse se concentre en 0 », précisément, une suite (f_n) telle que

(a) pour tout n, on a $\int_{\mathrm{G}} f_n \,\mathrm{d}\mu = 1$,
(b) $\sup_n \int_{\mathrm{G}} |f_n| \,\mathrm{d}\mu < \infty$,
(c) pour tout $\delta > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\{x \in \mathrm{G} : d(x,0) \geq \delta\}} |f_n(x)| \,\mathrm{d}\mu(x) = 0.$$

On peut récrire la condition (c) ainsi :
(c') pour tout voisinage V de 0 dans G,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\{x \notin \mathrm{V}\}} |f_n(x)| \,\mathrm{d}\mu(x) = 0.$$

Exemple. Si φ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^d$, d'intégrale 1, posons pour tout $n \geq 1$

$$f_n(x) = n^d \varphi(nx).$$

On obtient ainsi une approximation de l'unité. En effet, le changement de variable $y = nx$ donne $\mathrm{d}y = n^d \mathrm{d}x$ et

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\,\mathrm{d}y = 1, \qquad \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(y)|\,\mathrm{d}y = \mathrm{M}\,;$$

de plus,

$$\int_{|x|\geq\delta} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{|y|\geq n\delta} |\varphi(y)|\,\mathrm{d}y$$

tend vers 0 quand $n \to \infty$, par convergence dominée.

Théorème. *On suppose donnée une approximation de l'unité* (f_n) *sur* G. *Si* g *est uniformément continue bornée sur* G, *la suite* $(f_n * g)$ *tend uniformément vers* g. *Si* $g \in \mathrm{L}^p(\mathrm{G}, \mu)$, $1 \leq p < +\infty$, *on a convergence dans* L^p *de la suite des convolées quand* n *tend vers l'infini,*

$$\|f_n * g - g\|_p \to 0.$$

Preuve. — On écrira la preuve pour $\mathrm{G} = \mathbb{R}^d$. Soit M tel que

$$\int_{\mathrm{G}} |f_n|\,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x < \mathrm{M}$$

pour tout n ; on donne $\varepsilon > 0$; puisque g est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|g(x-t) - g(x)| < \varepsilon/(2\mathrm{M}) \tag{3}$$

pour tout $t \in \mathrm{G} = \mathbb{R}^d$ tel que $|t| = d(t, 0) < \delta$. Comme f_n est d'intégrale 1, on a

$$(f_n * g)(x) - g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f_n(t)\big(g(x-t) - g(x)\big)\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

On majore et on découpe,

$$\big|(f_n * g)(x) - g(x)\big| \leq \int_{|t|<\delta} |f_n(t)|\,\big|g(x-t) - g(x)\big|\,\mathrm{d}t + \int_{|t|\geq\delta} |f_n(t)|\,\big|g(x-t) - g(x)\big|\,\mathrm{d}t.$$

Dans la première intégrale, on peut utiliser (3) ; dans la deuxième, on utilise simplement $|g(x-t) - g(x)| \leq 2\|g\|_\infty$,

$$\big|(f_n * g)(x) - g(x)\big| \leq \frac{\varepsilon}{2\mathrm{M}} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t + 2\|g\|_\infty \int_{|t|\geq\delta} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Le majorant est indépendant de x, donc

$$\|f_n * g - g\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2\mathrm{M}} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t + 2\|g\|_\infty \int_{|t|\geq\delta} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Le premier terme est $< \varepsilon/2$ et le deuxième tend vers 0 d'après la condition (c) des approximations de l'unité ; il existe donc n_0, assez grand pour que pour tout $n \geq n_0$, on ait

$$\|f_n * g - g\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

ce qui démontre la convergence uniforme quand g est uniformément continue.

Dans le cas $g \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ on majore (4) avec Jensen-Hölder pour la mesure $|f_n(t)|\,\mathrm{d}t$,

$$\bigl|(f_n * g)(x) - g(x)\bigr|^p = \Bigl(\int_{\mathbb{R}^d} 1^q\,|f_n(t)|\,\mathrm{d}t\Bigr)^{p/q} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(t)|\bigl|g(x-t) - g(x)\bigr|^p\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \mathrm{M}^{p/q} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(t)|\bigl|g(x-t) - g(x)\bigr|^p\,\mathrm{d}t.$$

On intègre en x,

$$\|f_n * g - g\|_p^p \leq \mathrm{M}^{p/q} \iint |f_n(t)|\bigl|g(x-t) - g(x)\bigr|^p\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{M}^{p/q} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(t)|\Bigl(\int_{\mathbb{R}^d} \bigl|g(x-t) - g(x)\bigr|^p\,\mathrm{d}x\Bigr)\,\mathrm{d}t = \mathrm{M}^{p/q} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(t)|\,\|g_t - g\|_p^p\,\mathrm{d}t,$$

qu'on va traiter comme avant par découpage, en utilisant le lemme de continuité des translations : il existe $\delta > 0$ tel que $\|g_t - g\|_p < \varepsilon$ quand $|t| < \delta$. On continue avec

$$= \mathrm{M}^{p/q} \int_{|t|<\delta} |f_n(t)|\,\|g_t - g\|_p^p\,\mathrm{d}t + \mathrm{M}^{p/q} \int_{|t|\geq\delta} |f_n(t)|\,\|g_t - g\|_p^p\,\mathrm{d}t,$$

$$\leq \mathrm{M}^{p/q}\varepsilon^p \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t + 2^p\mathrm{M}^{p/q}\|g\|_p^p \int_{|t|\geq\delta} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t,$$

qu'on traite comme précédemment.

On aurait pu dégager un lemme simple, utilisé deux fois dans la preuve précédente.

Lemme. *Si (f_n) vérifie les conditions (a), (b) et (c), on a*

$$\lim_n \int_{\mathrm{G}} h(t) f_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

pour toute fonction h bornée sur G *et telle que* $\lim_{t\to 0} h(t) = 0$.

Dans la preuve de la convergence uniforme de $f_n * g$ vers g, on pouvait écrire la majoration

$$\bigl|(f_n * g)(x) - g(x)\bigr| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(t)|\,\omega_g(|t|)\,\mathrm{d}t\,;$$

le module de continuité $h(t) = \omega_g(|t|)$ de g tend vers 0 à l'origine par définition de la continuité uniforme, et il est borné partout par $2\|g\|_\infty$ parce que g est supposée bornée. Le cas L^p a utilisé $h(t) = \|g_t - g\|_p$; notons qu'on aurait pu, pour unifier l'écriture des deux cas, remplacer dans le premier cas ω_g par $h(t) = \|g_t - g\|_\infty$.

Dans certains exemples comme la suite (K_n) des noyaux de Fejér, on a *en plus* convergence uniforme vers 0 de (f_n) en dehors de tout voisinage de $0 \in \mathrm{G}$: on obtient alors

$$\lim_n \int_{\mathrm{G}} h(t) f_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

pour toute fonction h *intégrable* sur G et telle que $\lim_{t\to 0} h(t) = 0$.