cours 12, le 3 février 2010

Produit dénombrable de compacts métriques

On considère une suite d'espaces métriques $(\mathrm{X}_n, d_n)_{n \geqslant 0}$ et le produit infini

$$\mathrm{X} = \prod_{n \geqslant 0} \mathrm{X}_n.$$

Il n'y a pas de distance privilégiée sur ce produit (pas plus que sur les produits finis, d'ailleurs), mais une notion de *topologie produit*, dont le cas dénombrable et métrique qu'on va décrire maintenant est un cas particulier de la notion de produit quelconque d'espaces topologiques.

Un sous-ensemble V du produit X est ouvert si pour tout $x = (x_n)_{n \geqslant 0} \in \mathrm{V}$, où $x_n \in \mathrm{X}_n$, il existe N et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout point $y = (y_n)_{n \geqslant 0}$ de X, les conditions, en nombre fini

$$d_j(y_j, x_j) < \varepsilon, \quad j = 0, 1, \ldots, \mathrm{N},$$

impliquent $y \in \mathrm{V}$. Autrement dit, le voisinage fondamental de x défini par

$$\mathrm{W}(x, \mathrm{N}, \varepsilon) = \{y \in \mathrm{X} : d_j(y_j, x_j) < \varepsilon,\ j = 0, 1, \ldots, \mathrm{N}\}$$

est contenu dans V.

Cette topologie est métrisable. On peut prendre

$$d(x, y) = \sum_{n \geqslant 0} 2^{-n} \min\bigl(d_n(x_n, y_n), 1\bigr).$$

Exemple. L'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles, muni de la topologie produit, a une addition et une multiplication par les scalaires qui sont continues : c'est un espace vectoriel topologique. Mais cette topologie ne peut pas être définie par une norme, pour la raison-massue que tout voisinage de 0 contient des droites (en fait : contient un espace vectoriel de codimension finie), et que les boules des espaces normés ne contiennent pas de droite !

Convergence d'une suite dans un produit dénombrable de métriques

Proposition. *Une suite $(x^{(k)})$ dans X converge vers un point $x \in \mathrm{X}$ si et seulement si toutes ses suites coordonnées $(x_n^{(k)})$ convergent dans l'espace X_n vers la coordonnée x_n de la limite x.*

Preuve. — Si toutes les suites coordonnées $(x_n^{(k)})$ convergent vers $x_n \in \mathrm{X}_n$ quand k tend vers l'infini, il est clair que $x^{(k)}$ finit par entrer dans l'ensemble $\mathrm{W}(x, \mathrm{N}, \varepsilon)$, pour tout N et tout $\varepsilon > 0$, donc la suite $(x^{(k)})$ converge vers le point x dans l'espace produit X.

L'inverse est clair : pour n fixé, l'appartenance de $x^{(k)}$ au voisinage $\mathrm{W}(x, n, \varepsilon)$, pour $k \geq k_0$, contient l'information

$$d_n(x_n^{(k)}, x_n) < \varepsilon.$$

Compacité du produit dénombrable de compacts métriques

Théorème. *Le produit* $\prod_{n\geqslant 0} \mathrm{K}_n$ *d'une suite d'espaces compacts métrisables est compact pour la topologie produit.*

Preuve. — Par extraction de sous-suites diagonales.

Le théorème que Tychonoff a démontré

Pour le produit $\mathrm{X} = [0,1]^{\mathrm{I}}$, où I est un ensemble quelconque, la topologie produit est définie par les voisinages élémentaires des points $f = (f_i)_{i\in\mathrm{I}} \in \mathrm{X}$, qui sont donnés par

$$\mathrm{B}(f, \mathrm{J}, \varepsilon) = \{g \in \mathrm{X} : \forall j \in \mathrm{J},\ |g_j - f_j| < \varepsilon\},$$

où J est fini et $\varepsilon > 0$ (cette topologie est l'invention d'Andreï Tychonoff).

Un espace topologique séparé X est *complètement régulier* si pour tout point $x \in \mathrm{X}$ et tout voisinage V de x, il existe une fonction réelle continue sur X telle que $f(x) = 0$ et $f \geq 1$ en dehors de V. On vérifie facilement que tout espace métrique vérifie cette propriété.

Théorème de Tychonoff. *Le produit* $[0,1]^{\mathrm{I}}$ *est compact.*

Application par Tychonoff : *si* X *est un espace topologique complètement régulier, il est homéomorphe à une partie d'un espace compact.*

Preuve. — On prend pour I l'ensemble des couples (x, V) d'un point $x \in \mathrm{X}$ et d'un voisinage V de x ; on sait que pour chaque $i = (x, \mathrm{V})$ il existe une fonction continue f_i sur X telle que $f_i(x) = 0$ et $f_i \geq 1$ en dehors de V. On peut supposer f_i à valeurs dans $[0,1]$ et on considère

$$y \in \mathrm{X} \to (f_i(y))_{i\in\mathrm{I}} \in [0,1]^{\mathrm{I}}.$$

On vérifie qu'il s'agit d'un homéomorphisme de X sur son image dans le compact produit.

Remarque. Inversement, le lemme d'Urysohn produit suffisamment de fonctions continues sur un compact K, donc aussi sur ses sous-espaces topologiques X. Un espace topologique est donc complètement régulier si et seulement s'il est homéomorphe à une partie d'un espace compact. C'est l'énoncé de Tychonoff (avec des mots différents, la terminologie ayant évolué au cours du temps).

Convergence faible des suites dans un espace de Hilbert

Ce paragraphe n'a pas été présenté en cours, mais comme il était déjà rédigé je le laisse dans ces Notes de cours.

Théorème. *Soit* (x_n) *une suite bornée dans un espace de Hilbert* H *; il existe un vecteur* $x \in \mathrm{H}$ *et une sous-suite tels que*

$$\forall z \in \mathrm{H}, \quad \langle x_{n_k}, z\rangle \to \langle x, z\rangle.$$

On dit que la sous-suite (x_{n_k}) *converge faiblement* vers x.

Preuve. — Prenons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ pour simplifier un brin (en fait, on peut traiter le cas complexe par oubli des réels). Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite bornée dans un Hilbert H, disons bornée par M ; considérons l'ensemble Q des vecteurs $y \in \mathrm{H}$ de la forme

$$y = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} c_n x_n$$

avec les c_n rationnels ; l'ensemble Q est dénombrable (c'est le $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel engendré par la suite des vecteurs x_n). On désigne par ℓ_n la forme $\mathbb{Q}$-linéaire

$$y \in \mathrm{Q} \to \ell_n(y) = \langle y, x_n \rangle.$$

Pour chaque $y \in \mathrm{Q}$ on peut extraire de la suite bornée $(\ell_n(y))$ une sous-suite convergente, puis passer à une sous-suite diagonale (n_k) pour définir

$$\forall y \in \mathrm{Q}, \quad \ell(y) = \lim_k \ell_{n_k}(y),$$

qui est $\mathbb{Q}$-linéaire. On a $|\ell(y)| \le \mathrm{M}\,\|y\|$, donc on peut prolonger ℓ par continuité uniforme à l'adhérence F, qui est un Hilbert ; on trouve ainsi une forme $\mathbb{R}$-linéaire continue sur F, donc représentée par un vecteur $x \in \mathrm{F}$. La convergence de $\ell_{n_k}(y)$ vers $\ell(y)$, $y \in \mathrm{Q}$, se prolonge à tout les vecteurs $z \in \mathrm{F}$, grâce à la borne M sur les normes.

Si $z \in \mathrm{F}$ on a le résultat,

$$\langle x_{n_k}, z \rangle = \overline{\ell_{n_k}(z)} \to \overline{\ell(z)} = \langle x, z \rangle,$$

et si $z \in \mathrm{F}^\perp$ c'est évident car

$$\langle x_{n_k}, z \rangle = 0$$

pour tout k, tout comme $\langle x, z \rangle$.

Ascoli

On considère un espace topologique compact K et l'espace C(K) des fonctions réelles ou complexes sur K, normé par la *norme uniforme*,

$$\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in \mathrm{K}\}.$$

C'est un espace de Banach.

Ensembles équicontinus de fonctions

Un ensemble A de fonctions réelles (ou complexes) sur un espace topologique X est *équicontinu au point* $x \in \mathrm{X}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x qui « fonctionne » pour toutes les fonctions f de l'ensemble A :

$$\forall f \in \mathrm{A},\ \forall y \in \mathrm{V}, \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

On dit que A est équicontinu s'il est équicontinu en tout point.

Sur un compact métrique (K, d), un ensemble équicontinu de fonctions est *uniformément équicontinu*, c'est-à-dire que : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute fonction $f \in \mathrm{A}$, pour tous $x, y \in \mathrm{X}$, la condition $|x - y| < \delta$ entraîne $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

On peut montrer l'affirmation précédente comme on montre le théorème de Heine.

Exemples.

— Fonctions lipschitziennes ou höldériennes de constante fixée : on donne α tel que $0 < \alpha \le 1$ et une constante M. L'ensemble des fonctions f sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathrm{I}, \quad |f(x) - f(y)| \le \mathrm{M}\,|x - y|^\alpha$$

est uniformément équicontinu.

— Opérateurs intégraux : pour p tel que $1 < p \le \infty$, on pose pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^p([0,1])$

$$\forall x \in [0,1], \quad (\mathrm{T}_p f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction $\mathrm{T}_p f$ est continue sur $[0,1]$. Soit q l'exposant conjugué de p, $1/p = 1/q = 1$; les primitives des fonctions de la boule unité de $\mathrm{L}^p([0,1])$, pour $p > 1$ forment un ensemble de fonctions $1/q$-höldériennes de constante 1, donc uniformément équicontinu. En effet, si $0 \le x \le y \le 1$, on a par Hölder

$$|(\mathrm{T}_p f)(y) - (\mathrm{T}_p f)(x)| = \Big| \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \Big| \le (y-x)^{1/q} \Big(\int_0^1 |f(t)|^p\,\mathrm{d}t \Big)^{1/p}.$$

On vérifie de la même façon que $\|\mathrm{T}_p f\|_\infty \le \|f\|_p$.

On dit qu'un ensemble de fonctions scalaires est *ponctuellement borné* si pour tout $x \in \mathrm{X}$, l'ensemble des valeurs $\{f(x) : f \in \mathrm{A}\}$ prises par les fonctions au point x est borné dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Théorème d'Ascoli. *Soient* K *un espace topologique compact et* A *une partie de* C(K) *; pour que l'adhérence de* A *soit compacte dans* C(K) *il faut et il suffit que :*

— l'ensemble A *de fonctions soit ponctuellement borné et équicontinu.*

Preuve. — En fait si $\overline{\mathrm{A}}$ est compact, il est borné *uniformément*, toujours pour la même raison que $f \to \|f\|$ est continue et atteint son max. L'ensemble est aussi équicontinu, comme conséquence de la possibilité d'approcher uniformément les fonctions de A en sélectionnant dans un sous-ensemble fini de A, et un ensemble fini de fonctions continues est évidemment équicontinu.

Inversement, on doit montrer que A est un ensemble précompact dans l'espace métrique complet C(K). Si $\varepsilon > 0$ est donné, l'équicontinuité fournit pour chaque $x \in \mathrm{K}$ un ouvert U_x contenant x tel que

$$\forall f \in \mathrm{A}, \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon/3.$$

Ensuite, on peut extraire un recouvrement fini de K par les ouverts U_{x_i} associés à des points $x_1, \ldots, x_\mathrm{M}$. Pour chaque $f \in \mathrm{A}$, posons

$$p_f = (f(x_1), \ldots, f(x_\mathrm{M})) \in \mathbb{C}^\mathrm{M} ;$$

ces points forment un borné B de $\mathbb{C}^\mathrm{M}$,

$$\mathrm{B} = \{p_f : f \in \mathrm{A}\}$$

par l'hypothèse ponctuellement borné, appliquée à chacun des points x_i, $i = 1, \ldots, \mathrm{M}$. On peut alors recouvrir B, relativement compact dans $\mathbb{C}^\mathrm{M}$, par un nombre fini N de boules de rayon $\varepsilon/3$ (pour la norme du sup), centrées en des points $p_{f_1}, \ldots, p_{f_\mathrm{N}}$ de B.

On constate pour finir que

$$\mathrm{A} \subset \bigcup_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{B}(f_j, \varepsilon),$$

boules de la convergence uniforme sur K. Soit $f \in \mathrm{A}$; il s'agit de trouver j_0 tel que $\|f - f_{j_0}\|_\infty < \varepsilon$; pour le faire, il faut prendre $y \in \mathrm{K}$ quelconque et majorer $f(y) - f_{j_0}(y)$, pour le j_0 qui sera sélectionné.

Il existe j_0 tel que $p_f \in \mathrm{B}(p(f_{j_0}), \varepsilon/3)$. En considérant la coordonnée i du vecteur $p_f - p_{f_{j_0}}$ de $\mathbb{C}^{\mathrm{M}}$, on obtient

$$|f(x_i) - f_{j_0}(x_i)| < \varepsilon/3.$$

Soit maintenant $y \in \mathrm{K}$ quelconque ; il existe i tel que $y \in \mathrm{U}_{x_i}$, donc

$$|f(y) - f(x_i)| < \varepsilon/3, \quad |f_{j_0}(y) - f_{j_0}(x_i)| < \varepsilon/3,$$

ce qui montre que pour tout y, on a

$$|f(y) - f_{j_0}(y)| < \varepsilon.$$

Comme K est compact, on en déduit bien que $\|f - f_{j_0}\|_\infty < \varepsilon$, et on a montré que A est précompact.

Conséquences. Les ensembles décrits précédemment comme exemples équicontinus sont relativement compacts : un ensemble uniformément borné de fonctions lipschitziennes sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ est relativement compact dans $\mathrm{C}([a, b])$.

Les opérateurs T_p, $1 < p \leq \infty$, sont compacts de $\mathrm{L}^p([0, 1])$ dans $\mathrm{C}([0, 1])$. En revanche, l'opérateur T_1 n'est pas compact de $\mathrm{L}^1([0, 1])$ dans $\mathrm{C}([0, 1])$.

Ascoli pour $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$

Le sous-ensemble $\mathrm{A} \subset \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$ est relativement compact si et seulement si :

– l'ensemble A est uniformément borné ;

– pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour $|t| < \delta$ on ait $\|\tau_t f - f\|_\infty < \varepsilon$;

– pour tout $\varepsilon > 0$ il existe M tel que $|x| > \mathrm{M}$ implique, pour toute $f \in \mathrm{A}$, l'inégalité $|f(x)| < \varepsilon$.

Preuve. — On introduit le compactifié d'Alexandrov K de $\mathbb{R}^d$ par un point à l'infini, on prolonge les fonctions de A par 0 à l'infini et on constate que l'ensemble ainsi obtenu est borné et équicontinu comme sous-ensemble de C(K).

Peano

Théorème. *L'équation différentielle*

$$y' = f(y), \quad y(x_0) = y_0,$$

où f est continue sur $\mathbb{R}$, admet des solutions.

Preuve. — On considère un intervalle $\mathrm{J} = [y_0 - \tau, y_0 + \tau]$; sur cet intervalle la fonction f est bornée par un certain M. Considérons par ailleurs l'intervalle $\mathrm{I} = [x_0 - \tau/\mathrm{M}, x_0 + \tau/\mathrm{M}]$.

On peut approcher uniformément sur J la fonction continue f par des fonctions lipschitziennes (f_n), majorées par M, qu'on prolongera en dehors de J, par exemple par la valeur de f_n en un bout de l'intervalle J, le bout qui est le plus proche du point $x \notin \mathrm{J}$.

Comme f_n est lipschitzienne, on sait qu'il existe une solution y_n, définie sur $\mathbb{R}$, qui vérifie l'équation $y_n' = f_n(y_n)$ avec la condition initiale $y_n(x_0) = y_0$, donc y_n vérifie aussi l'équation intégrale

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f_n(y_n(t))\,\mathrm{d}t.$$

Comme $|x - x_0| \leq \tau/\mathrm{M}$ et que f_n est bornée par M, on déduit $|y_n(x) - y_0| \leq \tau$ pour tout $x \in \mathrm{I}$, donc sur l'intervalle I, les fonctions y_n prennent leurs valeurs dans J.

On a plus précisément pour $x_1 < x_2 \in \mathrm{I}$

$$|y_n(x_1) - y_n(x_2)| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f_n(y_n(t))| \, \mathrm{d}t \leq \mathrm{M}(x_2 - x_1),$$

ce qui montre que toutes les fonctions (y_n) sont M-lipschitziennes, à valeurs dans le borné J, et forment donc un ensemble relativement compact pour la norme uniforme. On extrait une sous-suite qui converge uniformément sur I vers une fonction y, et on obtient à la limite

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(y(t)) \, \mathrm{d}t.$$

En effet,

$$|f(y(t)) - f_n(y_{n_k}(t))| \leq |f(y(t)) - f(y_{n_k}(t))| + \|f - f_n\|_\infty$$

qui tend uniformément vers 0 sur I, par la continuité uniforme de f sur J et la convergence uniforme sur I de y_{n_k} vers y.

Remarque. Il n'y a pas d'unicité dans ce cadre : l'équation $y' = 2\sqrt{|y|}$ donne un exemple classique ; l'équation avec condition initiale $y(0) = 0$ admet la solution $y_0(x) = 0$, mais aussi la solution

$$y_1(x) = x^2 \mathbf{1}_{x \geq 0}.$$

On peut décrire l'ensemble de toutes les solutions $y_{a,b}$ de cette équation, où les paramètres a et b prennent toutes les valeurs telles que $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$, $a < +\infty$ et $b > -\infty$. La valeur de $y_{a,b}(x)$ est donnée par

$$-(a - x)^2 \;\text{ si }\; x \leq a, \quad 0 \;\text{ si }\; a \leq x \leq b, \quad (x - b)^2 \;\text{ si }\; x \geq b.$$

Diagonalisation des hermitiens compacts

Lemme. *Si* T *est une application linéaire continue d'un Hilbert* H_1 *dans un autre* H_2, *l'image* $\mathrm{T}(\mathrm{B}_{\mathrm{H}_1})$ *de la boule unité fermée de* H_1 *est fermée dans* H_2.

À démontrer plus tard.

Lemme. *Si l'opérateur* A *est un endomorphisme hermitien compact de l'espace de Hilbert* $\mathrm{H} \neq \{0\}$, *alors* $\|\mathrm{A}\|$ *ou* $-\|\mathrm{A}\|$ *est valeur propre de* A.

Preuve. — L'image de la boule unité fermée est fermée dans H, donc $\mathrm{K} = \mathrm{A}(\mathrm{B}_\mathrm{H})$ est un compact. On peut considérer

$$\tau^2 = \max\{\|y\|^2 : y \in \mathrm{K}\},$$

atteint en un point $y_0 = \mathrm{A}(x_0)$, $x_0 \in \mathrm{B}_\mathrm{H}$; si $\tau = 0$, alors $\mathrm{A} = 0$ et tous les vecteurs non nuls de H sont vecteurs propres pour la valeur $0 = \|\mathrm{A}\|$; si $\tau > 0$, il est clair que $\|x_0\| = 1$, sinon on pourrait faire mieux en multipliant x_0 par $t > 1$, proche de 1.

On note que

$$\|\mathrm{A}x\|^2 = \langle \mathrm{A}x, \mathrm{A}x \rangle = \langle \mathrm{A}^2 x, x \rangle$$

pour tout $x \in \mathrm{H}$. On a donc $\langle \mathrm{A}^2 x, x \rangle \leq \langle \mathrm{A}^2 x_0, x_0 \rangle$ pour tout $x \in \mathrm{B}_\mathrm{H}$. Si $\mathrm{H} = \mathbb{K} x_0$ le résultat est évident ; sinon, on prend $v \perp x_0$ de norme un, et on pose

$$x_\theta = \cos(\theta) x_0 + \sin(\theta) v,$$

courbe sur la sphère unité de H. La maximisation de $\langle \mathrm{A}^2 x_\theta, x_\theta \rangle$ en $\theta = 0$ donne

$$\langle \mathrm{A}^2 x_0, v \rangle = 0\,;$$

dans l'espace V de dimension ≤ 2 engendré par x_0 et $\mathrm{A}^2 x_0$, on voit que tout vecteur v orthogonal à x_0 est aussi orthogonal à $\mathrm{A}^2 x_0$: comme l'orthogonal de $v \ne 0$ dans V de dimension ≤ 2 est de dimension ≤ 1 et contient x_0, il en résulte que $\mathrm{A}^2 x_0$ est un multiple scalaire de x_0.

Si on pose $\mathrm{A}^2 x_0 = \lambda x_0$, on a

$$\|\mathrm{A}\|^2 = \langle \mathrm{A}^2 x_0, x_0 \rangle = \lambda \langle x_0, x_0 \rangle = \lambda,$$

donc

$$(\mathrm{A}^2 - \|\mathrm{A}\|^2 \,\mathrm{Id})(x_0) = (\mathrm{A} - \|\mathrm{A}\| \,\mathrm{Id})(\mathrm{A} + \|\mathrm{A}\| \,\mathrm{Id})(x_0) = 0,$$

ce qui entraîne que $\|\mathrm{A}\|$ ou $-\|\mathrm{A}\|$ est valeur propre de A.