cours 2, le 3 novembre 2009

## Espaces de Hilbert

### 1. Formes hermitiennes et produits scalaires

On va travailler avec des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

**Définition.** Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ; une *forme hermitienne* sur E est une application $\varphi$ de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ dans $\mathbb{K}$ qui possède les propriétés $a$ et $b$ suivantes :

*a.* Pour tout $y \in \mathrm{E}$, l'application $x \in \mathrm{E} \to \varphi(x, y)$ est $\mathbb{K}$-linéaire sur E.

*b.* Pour tous $x, y \in \mathrm{E}$, on a la *symétrie hermitienne*

$$\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}.$$

Conséquences. Si $\varphi$ est hermitienne, on a

$\varphi(x, x)$ est réel,

$y \to \varphi(x, y)$ est additive et $\varphi(x, \lambda y) = \overline{\lambda}\varphi(x, y)$,

ce qui se traduit en disant que $y \to \varphi(x, y)$ est *antilinéaire*. De plus,

$$\begin{aligned} \varphi(x+y, x+y) &= \varphi(x, x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) + \varphi(y, y) \\ &= \varphi(x, x) + 2 \operatorname{Re} \varphi(x, y) + \varphi(y, y). \end{aligned} \tag{1}$$

*Inégalité de Cauchy-Schwarz*

Dans le cas d'une forme hermitienne $\geq 0$ sur E (ce qui signifie que $\varphi(x, x) \geq 0$ pour tout vecteur $x \in \mathrm{E}$), on a *l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$\forall x, y \in \mathrm{E}, \quad |\varphi(x, y)| \leq \varphi(x, x)^{1/2} \varphi(y, y)^{1/2}.$$

*Preuve.* — Considérons le trinôme de variable réelle $t$

$$\mathrm{T}(t) = \varphi(tx + y, tx + y) = t^2 \varphi(x, x) + 2t \operatorname{Re} \varphi(x, y) + \varphi(y, y).$$

Par hypothèse, on a $\mathrm{T}(t) \geq 0$ pour tout réel $t$, ce qui implique que le discriminant du trinôme T est $\leq 0$ ; par conséquent,

$$\big(\operatorname{Re} \varphi(x, y)\big)^2 \leq \varphi(x, x)\varphi(y, y).$$

Cela suffit dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mais dans le cas complexe, il faut faire un pas de plus. Posons

$$\varphi(x, y) = r\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

avec $r \geq 0$ et $\theta$ réel. Puisque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on peut considérer le vecteur $x_1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} x$ de E, et lui appliquer l'inégalité précédente ; mais

$$\operatorname{Re} \varphi(x_1, y) = \operatorname{Re}\Big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \varphi(x, y)\Big) = r = |\varphi(x, y)|,$$

et

$$\varphi(x_1, x_1) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\, \overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}} \varphi(x, x) = \varphi(x, x),$$

donc

$$|\varphi(x, y)|^2 = \big(\operatorname{Re} \varphi(x_1, y)\big)^2 \leq \varphi(x_1, x_1)\varphi(y, y) = \varphi(x, x)\varphi(y, y).$$

*Semi-norme déduite d'une forme hermitienne* $\geq 0$
Si on pose $\|x\| = \varphi(x,x)^{1/2}$, on voit que la fonction $x \in \mathrm{E} \to \|x\|$ est une semi-norme sur E ; en effet :

$$\|\lambda x\| = \varphi(\lambda x, \lambda x)^{1/2} = \big(\lambda\overline{\lambda}\varphi(x,x)\big)^{1/2} = |\lambda|\,\|x\|$$

pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, et par Cauchy-Schwarz

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\varphi(x,y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2,$$

ce qui donne l'inégalité triangulaire $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Une forme hermitienne $\varphi \geq 0$ sur E telle que

$$\big(\varphi(x,x) = 0\big) \Rightarrow \big(x = 0_{\mathrm{E}}\big)$$

est appelé *produit scalaire* sur E, souvent noté

$$\langle x, y\rangle = \varphi(x,y).$$

La semi-norme associée à un produit scalaire sur E est une *norme* sur E :

$$\big(\|x\| = 0\big) \Leftrightarrow \big(x = 0_{\mathrm{E}}\big).$$

Rappel : sur un espace normé, la fonction norme $x \to \|x\|$ est lipschitzienne, donc continue, par l'inégalité triangulaire :

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|.$$

En utilisant le produit scalaire et la norme $\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}$, on traduit l'équation (1) en

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2.$$

On en déduit la *relation de la médiane*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2.$$

On traduit Cauchy-Schwarz avec le produit scalaire et la norme :

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|.$$

Le produit scalaire avec un vecteur fixé $y$ de E,

$$\ell_y : x \in \mathrm{E} \to \langle x,y\rangle \in \mathbb{K},$$

est une fonction lipschitzienne de constante $\|y\|$, donc continue sur l'espace normé E,

$$|\ell_y(x_1) - \ell_y(x_2)| = |\langle x_1,y\rangle - \langle x_2,y\rangle| = |\langle x_1 - x_2, y\rangle| \leq \|y\|\,\|x_1 - x_2\|.$$

L'application $\ell_y$ est donc une forme linéaire continue sur E. On verra plus loin que sur un espace de Hilbert H, toute forme linéaire continue $\ell$ est de cette forme.

Exemples de produit scalaire.

Sur $\mathbb{C}^n$, le produit scalaire usuel est défini pour deux vecteurs quelconques

$$u = (u_1, \ldots, u_n),\ v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^n \quad \text{par} \quad \langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j \overline{v_j}.$$

Sur $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, on définit le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(\omega)\overline{g(\omega)}\,\mathrm{d}\mu(\omega).$$

La norme associée est la norme $\mathrm{L}^p$ avec $p = 2$. L'espace $\mathrm{L}^2$ est complet pour cette norme déduite du produit scalaire.

Sur $\mathrm{E} = \mathrm{C}([0,1])$, on peut définir le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x.$$

La norme associée est la norme induite sur $\mathrm{C}([0,1])$ par la norme de $\mathrm{L}^2([0,1])$. Muni de cette norme, l'espace E n'est pas complet (exercice facile).

*Orthogonalité*

On suppose que E est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Deux vecteurs $x$ et $y$ de E sont *orthogonaux* si $\langle x, y\rangle = 0$ (on a aussi $\langle y, x\rangle = 0$), et on note $x \perp y$. Si A est une partie de E, on dit que $x$ est *orthogonal* à A si $x$ est orthogonal à tous les éléments de A ; dans ce cas, on note $x \perp \mathrm{A}$.

Exemple : les fonctions $e_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$, $k \in \mathbb{Z}$, sont deux à deux orthogonales (et de norme 1) dans l'espace $\mathrm{L}^2([0, 2\pi], \mathrm{d}x/(2\pi))$,

$$\langle e_k, e_\ell\rangle = \int_0^{2\pi} e_k(x)\overline{e_\ell(x)}\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-\ell)x}\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = \delta_{k-\ell,0} = \delta_{k,\ell}.$$

*Pythagore*

Si $x \perp y$ on a

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

La relation se généralise par récurrence au cas d'un nombre fini de vecteurs : si les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ sont deux à deux orthogonaux, on a

$$\|v_1 + \cdots + v_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|v_k\|^2.$$

**Définition.** Un *espace de Hilbert* est un espace vectoriel H réel ou complexe, muni d'un produit scalaire, et qui est complet pour la norme déduite de ce produit scalaire.

Exemple : $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, muni du produit scalaire défini plus haut, est un espace de Hilbert. L'espace $\ell^2$ des suites numériques de carré sommable en est un cas particulier (mesure de comptage sur $\mathbb{N}$).

## 2. Séries, familles sommables

**2.1.** *Séries de vecteurs dans un espace vectoriel normé*

Soient E un espace vectoriel normé et $u_0, \ldots, u_n, \ldots$ des vecteurs de E ; posons pour tout entier $n \geq 0$

$$\mathrm{U}_n = u_0 + \cdots + u_n,$$

vecteur de E appelé *somme partielle* de la série $\sum u_n$.

**Définition.** On dit que la série de vecteurs $\sum u_k$ converge *dans* E si la suite $(\mathrm{U}_n)$ des sommes partielles converge vers un vecteur $v \in \mathrm{E}$,

$$\lim_n \|\mathrm{U}_n - v\|_\mathrm{E} = 0\,;$$

on dit alors que $v$ est la *somme de la série* et on note

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = v.$$

**Exercice.** Montrer qu'un espace normé E est complet si et seulement si la propriété suivante est vérifiée : pour toute série $\sum u_k$ de vecteurs de E, la condition

$$\sum \|u_k\| < +\infty$$

implique la convergence dans E de la série $\sum u_k$.

*Séries de vecteurs orthogonaux dans un Hilbert*

**Proposition 1.** *On suppose que les vecteurs $(u_k)_{k \geqslant 0}$ d'un espace de Hilbert* H *sont deux à deux orthogonaux. La série de vecteurs $\sum u_k$ converge dans* H *si et seulement si*

$$\sum \|u_k\|^2 < +\infty.$$

*Lorsque la série de vecteurs converge, on a*

$$\Bigl\|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\Bigr\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|^2.$$

*Preuve.* — Posons pour tout entier $n \geq 0$

$$\mathrm{V}_n = \|u_0\|^2 + \cdots + \|u_n\|^2.$$

Si $m < n$, on a

$$\mathrm{U}_n - \mathrm{U}_m = u_{m+1} + \cdots + u_n,$$

donc par orthogonalité

$$\|\mathrm{U}_n - \mathrm{U}_m\|^2 = \|u_{m+1}\|^2 + \cdots + \|u_n\|^2 = \mathrm{V}_n - \mathrm{V}_m.$$

On voit ainsi que la suite $(\mathrm{U}_n)$ est de Cauchy dans H si et seulement si la suite $(\mathrm{V}_n)$ des sommes partielles de la série numérique $\sum \|u_k\|^2$ est de Cauchy. Comme H et $\mathbb{R}$ sont complets, la série de vecteurs converge dans H si et seulement si la série des carrés des normes converge dans $\mathbb{R}$.

Comme la norme est une fonction continue sur H, on a par continuité et par Pythagore, lorsque la série converge,

$$\Big\|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\Big\|^2 = \lim_n \Big\|\sum_{k=0}^{n} u_k\Big\|^2 = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \|u_k\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|^2.$$

Réciproquement, supposons que la série de vecteurs converge : la suite $(\mathrm{U}_n)$ des sommes partielles converge vers un vecteur $v \in \mathrm{H}$, donc $\|\mathrm{U}_n\|$ converge vers $\|v\|$ et

$$+\infty > \|v\|^2 = \lim_n \|\mathrm{U}_n\|^2 = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \|u_k\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|^2,$$

ce qui montre que la série des carrés des normes converge.

*Suite orthonormée*

Dans le cas d'une suite orthonormée $(f_n)$, on a pour toute suite de coefficients $(\lambda_n)$ : la série $\sum \lambda_n f_n$ converge dans H si et seulement si $\sum |\lambda_n|^2 < +\infty$, et

$$\Big\|\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k f_k\Big\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |\lambda_k|^2.$$

Il suffit d'appliquer les résultats précédents aux vecteurs $u_k = \lambda_k f_k$.

Un théorème de F. Riesz (1907 ; intérêt principalement historique) : *soit $(f_n)$ une suite orthonormée dans l'espace de Hilbert* $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(0,1)$ *; pour qu'il existe une fonction $g$ de* H *telle que*

$$\langle g, f_n\rangle = \lambda_n$$

*pour tout $n$, il faut et il suffit que*

$$\sum |\lambda_n|^2 < +\infty.$$

*Preuve.* — Dans un sens, on applique l'inégalité de Bessel (voir plus loin, corollaire 1). Dans l'autre sens, si les coefficients sont de carré sommable on peut poser

$$g = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k f_k \in \mathrm{H}.$$

Par continuité du produit scalaire, on obtient pour tout entier $n \geq 0$

$$\langle g, f_n\rangle = \lim_{\mathrm{K}} \Big\langle \sum_{k=0}^{\mathrm{K}} \lambda_k f_k, f_n \Big\rangle = \lambda_n \langle f_n, f_n\rangle = \lambda_n.$$

**2.2.** *Familles sommables*

**Définition.** Une famille $(u_i)_{i\in \mathrm{I}}$ de vecteurs d'un espace vectoriel normé E est dite *sommable* s'il existe un vecteur $v \in \mathrm{E}$ possédant la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fini $\mathrm{J}_0 \subset \mathrm{I}$ tel que pour tout sous-ensemble fini J de I contenant $\mathrm{J}_0$ ($\mathrm{J}_0 \subset \mathrm{J} \subset \mathrm{I}$), on ait

$$\Big\| v - \sum_{j\in \mathrm{J}} u_j \Big\| < \varepsilon.$$

Dans ce cas, on dit que $v$ est la *somme de la famille* et on note

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} u_i := v.$$

Le résultat $v$ est évidemment indépendant de l'ordre des termes, puisqu'il n'y a aucun ordre donné sur l'ensemble I des indices.

*Cas de nombres réels* $\geq 0$

**Lemme.** *La famille* $(u_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *de nombres réels* $u_i \geq 0$ *est sommable dans* $\mathbb{R}$ *si et seulement si*

$$\sup\Big\{\sum_{j\in \mathrm{J}} u_j : \mathrm{J} \textit{ fini},\ \ \mathrm{J} \subset \mathrm{I}\Big\} < +\infty,$$

*et dans le cas où le sup est fini,*

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} u_i = \sup\Big\{\sum_{j\in \mathrm{J}} u_j : \mathrm{J} \textit{ fini},\ \ \mathrm{J} \subset \mathrm{I}\Big\}. \tag{2}$$

*De plus, lorsque* $\mathrm{I} = \mathbb{N}$*, la famille* $(u_n)$ *de réels* $\geq 0$ *est sommable dans* $\mathbb{R}$ *si et seulement si la série* $\sum u_n$ *converge vers une valeur finie.*

*Preuve.* — Pour tout sous-ensemble fini J de I, posons

$$\mathrm{S}_\mathrm{J} = \sum_{j\in \mathrm{J}} u_j.$$

Si la famille des $u_i \geq 0$ est sommable de somme $\mathrm{S} \in \mathbb{R}$, et si on choisit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un sous-ensemble fini $\mathrm{J}_0$ de I, tel que pour tout $\mathrm{J}_1$ fini contenant $\mathrm{J}_0$, on ait

$$|\mathrm{S}_{\mathrm{J}_1} - \mathrm{S}| < \varepsilon,$$

donc $\mathrm{S}_{\mathrm{J}_1} < \mathrm{S}+\varepsilon$. Si J est un sous-ensemble fini quelconque de I, considérons $\mathrm{J}_1 = \mathrm{J}\cup \mathrm{J}_0$ ; comme les nombres $u_i$ sont $\geq 0$, on a

$$\mathrm{S}_\mathrm{J} \leq \mathrm{S}_{\mathrm{J}_1} < \mathrm{S} + \varepsilon,$$

et comme J et $\varepsilon$ sont quelconques,

$$\sup\Big\{\sum_{j\in \mathrm{J}} u_j : \mathrm{J} \text{ fini},\ \ \mathrm{J} \subset \mathrm{I}\Big\} \leq \mathrm{S} = \sum_{i\in \mathrm{I}} u_i.$$

Inversement posons

$$\mathrm{M} := \sup\Big\{\sum_{j\in \mathrm{J}} u_j : \mathrm{J} \text{ fini},\ \ \mathrm{J} \subset \mathrm{I}\Big\}$$

et supposons que $\mathrm{M} < +\infty$. Si $\varepsilon > 0$ est donné, on peut trouver un sous-ensemble $\mathrm{J}_0$ fini tel que $\mathrm{S}_{\mathrm{J}_0} > \mathrm{M} - \varepsilon$ ; pour tout J plus grand que $\mathrm{J}_0$, on aura

$$\mathrm{S}_{\mathrm{J}_0} \leq \mathrm{S}_{\mathrm{J}} \leq \mathrm{M} < \mathrm{S}_{\mathrm{J}_0} + \varepsilon,$$

ce qui montre que M est la somme de la famille sommable.

Si la famille $(u_n)$ de nombres réels $\geq 0$, indexée par $\mathbb{N}$, est sommable, on a donc que les sommes partielles de la série $\sum u_n$ sont majorées, donc la série converge. Inversement, si la série converge, toutes les sommes $\sum_{j \in \mathrm{J}} u_j$ sont majorées par la somme de la série.

**Propriété.** *Si l'ensemble d'indices* I *est dénombrable, s'il est énuméré sous la forme* $\mathrm{I} = \{i_0, i_1, \ldots, i_n, \ldots\}$ *et si la famille* $\sum_{i \in \mathrm{I}} u_i$ *est sommable, la somme de la famille sommable est aussi la somme de la série :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_{i_k} = \sum_{i \in \mathrm{I}} u_i.$$

*Preuve.* — Soient $v$ la somme de la famille sommable et $\mathrm{J}_0$ fini tel que $\left\|v - \sum_{j \in \mathrm{J}} u_j\right\| < \varepsilon$ pour tout $\mathrm{J} \supset \mathrm{J}_0$ ; il existe un entier N tel que

$$\mathrm{J}_0 \subset \{i_0, i_1, \ldots, i_{\mathrm{N}}\}.$$

Pour tout $n \geq \mathrm{N}$, l'ensemble $\mathrm{J} = \{i_0, i_1, \ldots, i_n\}$ contient $\mathrm{J}_0$, donc

$$\left\|v - \sum_{k=0}^{n} u_{i_k}\right\| < \varepsilon,$$

ce qui montre que $v$ est la somme de la série $\sum_k u_{i_k}$.

Le résultat est valable pour toute façon d'énumérer l'ensemble dénombrable I : la série converge pour toute permutation des entiers, et la somme de la série est toujours la même. On dit que la série est *commutativement convergente*.

*Exercice* : si toutes les permutations d'une série $\sum u_n$ de vecteurs d'un espace normé E sont convergentes et ont la même somme $v$, montrer que la famille $(u_n)$ est sommable de somme $v$. S'il y a deux permutations de la série qui ont des sommes différentes, montrer qu'il y a une permutation de la série qui ne converge pas. Autrement dit : *la famille* $(u_n)_{n \geqslant 0}$ *est sommable si et seulement si la série* $\sum u_n$ *est commutativement convergente.*

Autre exemple, somme d'une série orthogonale : *lorsque les vecteurs* $u_n$ *sont deux à deux orthogonaux dans* H, *la somme de la série au sens usuel est aussi la somme comme famille sommable.*

*Preuve.* — Posons $v = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Si la série $\sum u_n$ de vecteurs orthogonaux est convergente, on a vu à la proposition 1 que

$$\sum \|u_n\|^2 < +\infty.$$

Si $\varepsilon > 0$ est donné, considérons N tel que

$$\sum_{k > \mathrm{N}} \|u_k\|^2 < \varepsilon^2/4$$

et posons $J_0 = \{0, 1, \ldots, N\}$. Pour tout J fini contenant $J_0$, on aura

$$\Big\|\sum_{j\in J} u_j - \sum_{j\in J_0} u_j\Big\|^2 = \Big\|\sum_{j\in J\setminus J_0} u_j\Big\|^2 = \sum_{j\in J\setminus J_0} \|u_j\|^2 \le \sum_{k>N} \|u_k\|^2 < \varepsilon^2/4.$$

En prenant $J = \{0, \ldots, n\}$ pour $n > N$, on voit donc que

$$\Big\|\sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{j\in J_0} u_j\Big\| < \varepsilon/2$$

pour tout $n > N$, ce qui donne à la limite quand $n \to \infty$

$$\Big\|v - \sum_{j\in J_0} u_j\Big\| \le \varepsilon/2.$$

Pour tout J fini contenant $J_0$, on a donc par l'inégalité triangulaire

$$\Big\|v - \sum_{j\in J} u_j\Big\| < \varepsilon,$$

ce qui termine la preuve.

**3. Bases hilbertiennes**

*Projection orthogonale : premier contact*

La distance d'un point $x$ à une partie A d'un espace métrique $(X, d)$ est définie par

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

**Lemme.** *On considère le sous-espace vectoriel* $F = \mathrm{Vect}(f_j : j \in J)$ *engendré par un système orthonormé fini* $(f_j)_{j\in J}$ *dans un espace de Hilbert* H. *Soit* $x \in H$ *; le vecteur*

$$y = \sum_{j\in J} \langle x, f_j\rangle\, f_j$$

*vérifie les propriétés suivantes :*

$$y \in F, \quad x - y \perp F.$$

*Il en résulte que* $y$ *est le point de* F *le plus proche de* $x$,

$$\|x - y\| = d(x, F).$$

*De plus l'application*

$$P_F : x \in H \to y = \sum_{j\in J} \langle x, f_j\rangle\, f_j$$

*est linéaire de norme* $\le 1$.

*Preuve.* — Il est clair que $y \in \mathrm{F}$ ; ensuite, si $f_k$ est un des vecteurs du système orthonormé fini, on peut écrire par la linéarité (à gauche) du produit scalaire

$$\langle y, f_k\rangle = \Big\langle \sum_{j\in \mathrm{J}} \langle x, f_j\rangle\, f_j, f_k \Big\rangle = \sum_{j\in \mathrm{J}} \langle x, f_j\rangle\, \langle f_j, f_k\rangle = \sum_{j\in \mathrm{J}} \langle x, f_j\rangle\, \delta_{j,k} = \langle x, f_k\rangle.$$

On a donc $\langle f_k, x - y\rangle = 0$ pour tout $k \in \mathrm{J}$. Par linéarité, on déduit

$$\Big\langle \sum_{k\in \mathrm{J}} a_k f_k, x - y \Big\rangle = 0$$

pour tous les scalaires $(a_k)$, c'est-à-dire que $x - y \perp \mathrm{F}$.

Si $z$ est un élément de F, on écrit

$$x - z = (x - y) + (y - z)$$

et comme $y - z \in \mathrm{F}$, $x - y$ est orthogonal à $y - z$, donc

$$\|x - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \ge \|x - y\|^2,$$

ce qui montre que $y$ est plus proche de $x$ que $z$. Il est clair que $\mathrm{P_F}$ est linéaire ; en prenant $z = 0$ dans l'inégalité précédente, on récrit, avec $y = \mathrm{P_F} x$

$$\forall x \in \mathrm{H}, \quad \|x\|^2 = \|x - \mathrm{P_F} x\|^2 + \|\mathrm{P_F} x\|^2 \ge \|\mathrm{P_F} x\|^2,$$

donc $\|\mathrm{P_F}\| \le 1$.

**Corollaire 1 :** inégalité de Bessel : *pour tout système orthonormé* $(f_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *et tout vecteur* $x \in \mathrm{H}$, *on a*

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} |\langle x, f_i\rangle|^2 \le \|x\|^2.$$

*Preuve.* — D'après l'équation (2), il suffit d'établir la majoration pour tout sous-ensemble fini J de I. D'après le lemme précédent, si on pose $\mathrm{F_J} = \mathrm{Vect}(f_j : j \in \mathrm{J})$, on a

$$\sum_{j\in \mathrm{J}} |\langle x, f_j\rangle|^2 = \Big\| \sum_{j\in \mathrm{J}} \langle x, f_j\rangle\, f_j \Big\|^2 = \|\mathrm{P}_{\mathrm{F_J}} x\|^2 \le \|x\|^2.$$

*Base hilbertienne*

**Définition.** Une famille $(e_i)_{i\in \mathrm{I}}$ de vecteurs d'un espace de Hilbert H est une base hilbertienne de H si :

*a.* C'est une famille orthonormée, $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$.
*b.* L'espace vectoriel engendré $\mathrm{Vect}(e_i : i \in \mathrm{I})$ est dense dans H.

**Proposition.** *Si* $(e_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *est une base hilbertienne de* H, *tout vecteur* $x$ *de* H *est égal à la somme de la famille sommable*

$$x = \sum_{i\in \mathrm{I}} \langle x, e_i\rangle\, e_i.$$

*De plus,*

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in \mathrm{I}} |\langle x, e_i \rangle|^2.$$

*Preuve.* — Pour chaque sous-ensemble fini J de I, désignons par V(J) l'espace vectoriel engendré par l'ensemble fini des vecteurs $e_j$, $j \in \mathrm{J}$. La réunion

$$\mathrm{V} = \bigcup_{\mathrm{J} \subset \mathrm{I}} \mathrm{V}(\mathrm{J})$$

est égale au sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(e_i : i \in \mathrm{I})$ engendré par la famille $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$.

Soit $x$ un vecteur de H, quelconque ; donnons $\varepsilon > 0$ ; puisque V est dense, par définition d'une base hilbertienne, il existe un vecteur $z_0 \in \mathrm{V}$ tel que

$$\|x - z_0\| < \varepsilon.$$

On peut trouver $\mathrm{J}_0 \subset \mathrm{I}$ fini tel que $z_0 \in \mathrm{V}(\mathrm{J}_0)$. Pour tout sous-ensemble fini J de I tel que $\mathrm{J}_0 \subset \mathrm{J}$, considérons la projection orthogonale $y_\mathrm{J}$ de $x$ sur V(J), qui est égale à

$$y_\mathrm{J} = \sum_{j \in \mathrm{J}} \langle x, e_j \rangle \, e_j.$$

Puisque J contient $\mathrm{J}_0$, V(J) est plus grand que $\mathrm{V}(\mathrm{J}_0)$, donc $z_0$ est un vecteur de V(J). Par la propriété de la projection orthogonale,

$$\|x - y_\mathrm{J}\| = d(x, \mathrm{V}(\mathrm{J})) \le \|x - z_0\| < \varepsilon.$$

On a ainsi montré que la famille des vecteurs

$$u_i = \langle x, e_i \rangle \, e_i, \quad i \in \mathrm{I},$$

est sommable de somme $x$.

D'après l'inégalité de Bessel, la famille $|\langle x, e_i \rangle|^2$ est sommable dans $\mathbb{R}$, et

$$\mathrm{S} := \sum_{i \in \mathrm{I}} |\langle x, e_i \rangle|^2 \le \|x\|^2.$$

Montrons que S est en fait égal à $\|x\|^2$. Soit $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ fini tel que

$$\|x - y_\mathrm{J}\| < \varepsilon\,;$$

on a

$$\|x\|^2 = \|y_\mathrm{J}\|^2 + \|x - y_\mathrm{J}\|^2 < \|y_\mathrm{J}\|^2 + \varepsilon^2$$

et

$$\|y_\mathrm{J}\|^2 = \sum_{j \in \mathrm{J}} |\langle x, e_j \rangle|^2 \le \mathrm{S}$$

donc

$$\|x\|^2 \le \mathrm{S} + \varepsilon^2,$$

et comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, on conclut que

$$\|x\|^2 = \mathrm{S} = \sum_{i \in \mathrm{I}} |\langle x, e_i \rangle|^2.$$