cours 8, le 6 janvier 2010

Autres conséquences de l'analyticité et de l'utilisation des séries de Fourier

Principe du maximum

Proposition. *Si f est dans $\mathrm{H}_c(\Omega)$ et si $|f|$ atteint un maximum local en un point z_0 de Ω, alors f est constante au voisinage de z_0 ; si Ω est connexe, f est constante sur Ω.*

Preuve. — Encore avec Fourier : si z_0 est un maximum local de $|f|$, on peut trouver $r_0 > 0$ tel que $\mathrm{D}(z_0, r_0) \subset \Omega$ et tel que $|f(z_0)|$ soit la valeur maximale de $|f|$ dans ce disque ouvert :

$$|h| < r_0 \Rightarrow |f(z_0 + h)| \leq |f(z_0)|.$$

On considère le développement de Taylor au voisinage de z_0,

$$\forall h \in \mathrm{D}(0, r_0), \quad f(z_0 + h) = \sum_{n \geqslant 0} a_n h^n.$$

Si $0 < r < r_0$, on aura $|f(z_0)| \geq |f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|$ pour tout θ. En intégrant sur le cercle $h = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, et en utilisant l'égalité de Bessel-Parseval on obtient que

$$|f(z_0)|^2 = |a_0|^2 \geq \int_0^{2\pi} \Bigl|\sum_{n \geqslant 0} a_n r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\Bigr|^2 \,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = \sum_{n \geqslant 0} |a_n|^2 r^{2n} = |a_0|^2 + \sum_{n \geqslant 1} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Il en résulte que tous les a_k, $k > 0$ sont nuls et f est localement constante, égale à a_0 dans $\mathrm{D}(z_0, r_0)$. Si Ω est connexe, on trouve que f est constante en appliquant le principe des zéros isolés à la fonction holomorphe $g(z) = f(z) - f(z_0)$, qui est nulle au voisinage du point $z_0 \in \Omega$, donc identiquement nulle dans l'ouvert connexe Ω.

Corollaire. *Si f est holomorphe sur un ouvert borné Ω et prolongeable en fonction continue sur l'adhérence, le maximum de $|f|$ est atteint sur le bord de Ω.*

Preuve. — Soit z_0 un point maximum de $|f|$ sur le compact $\overline{\Omega}$; si z_0 est sur le bord c'est fini, sinon on désigne par $r_0 > 0$ la distance de z_0 au bord de Ω ; on a $r_0 < +\infty$ puisque Ω est borné, et il existe un point $z_1 \in \partial\Omega$ tel que $|z_0 - z_1| = r_0$. Le disque ouvert $\mathrm{V} = \mathrm{D}(z_0, r_0)$ est contenu dans Ω, il est connexe et $|f|$ admet un maximum dans V, donc f est constante dans V par la proposition précédente. Sur l'intervalle ouvert non vide $]z_0, z_1[$, la fonction f est donc constante égale à $f(z_0)$, et par hypothèse, f est continue sur l'adhérence de Ω, donc $f(z_1) = f(z_0)$ et le maximum de $|f|$ est *aussi* atteint au bord.

Un mot sur les domaines non bornés

On considère la bande verticale

$$\mathrm{S} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}.$$

Le bord de la bande est formé des deux droites verticales d'abscisses 0 et 1.

Lemme des trois droites. *Si f est continue et* **bornée** *dans $\overline{\mathrm{S}}$, holomorphe dans S, on a*

$$\sup_{z \in \mathrm{S}} |f(z)| = \sup_{z \in \partial\mathrm{S}} |f(z)|.$$

Preuve. — Pour $\varepsilon > 0$ fixé, posons pour tout $z \in \overline{\mathrm{S}}$

$$g_\varepsilon(z) = \mathrm{e}^{\varepsilon z^2} f(z).$$

La fonction g_ε est continue dans $\overline{\mathrm{S}}$, et elle est holomorphe dans S. Comme on a pour tout $z = x + \mathrm{i}y \in \overline{\mathrm{S}}$

$$|\,\mathrm{e}^{\varepsilon z^2}\,| = |\,\mathrm{e}^{\varepsilon (x+\mathrm{i}y)^2}\,| = \mathrm{e}^{\varepsilon(x^2-y^2)} \le \mathrm{e}^{\varepsilon}\,\mathrm{e}^{-\varepsilon y^2},$$

et que f est supposée *bornée*, on voit que $g_\varepsilon(z)$ tend vers 0 quand $z \in \mathrm{S}$ tend vers l'infini. Si f est identiquement nulle sur S, le résultat voulu est clair ; sinon si $f(z_0) \ne 0$, on trouve A assez grand pour que $|\,\mathrm{Im}\, z_0| < \mathrm{A}$ et

(1) $$|\,\mathrm{e}^{\varepsilon z^2} f(z)| < |\,\mathrm{e}^{\varepsilon z_0^2} f(z_0)|$$

pour tout z tel que $|\,\mathrm{Im}\, z| = \mathrm{A}$. Le maximum de $|g_\varepsilon|$ sur le rectangle

$$\mathrm{R} = \{z \in \overline{\mathrm{S}} : |\,\mathrm{Im}\, z| \le \mathrm{A}\}$$

est atteint sur le bord, d'après le corollaire précédent, mais d'après (1), le maximum n'est pas atteint sur les côtés horizontaux $|\,\mathrm{Im}\, z| = \mathrm{A}$, donc il est atteint sur les côtés verticaux, qui sont dans le bord de S. Il en résulte que

$$\left|\mathrm{e}^{\varepsilon z_0^2} f(z_0)\right| = |g_\varepsilon(z_0)| \le \sup_{z \in \partial \mathrm{S}} |g_\varepsilon(z)| \le \mathrm{e}^{\varepsilon} \sup_{z \in \partial \mathrm{S}} |f(z)|.$$

En faisant tendre ε vers 0 on obtient le résultat.

Remarque. On peut adoucir l'hypothèse « f bornée sur S » mais une hypothèse est nécessaire : la fonction g définie sur S par $g(z) = \exp(\sin(\pi z))$ est de module 1 sur les deux droites du bord de S, mais elle n'est pas bornée dans S. On voit en effet que

$$|g(1/2 + \mathrm{i}y)| = \exp(\mathrm{ch}(\pi y)),$$

qui tend très vite vers l'infini quand $|y| \to \infty$. Voir dans les livres les sections intitulées *Phragmen-Lindelöf* ; la philosophie en est (vaguement) la suivante : si f est bornée sur le bord du domaine non borné Ω mais n'est pas bornée sur Ω, alors $|f|$ doit en fait être *très grand* à l'infini.

Majoration de la dérivée

On va montrer que la majoration d'une fonction holomorphe sur un disque implique une majoration de sa dérivée sur les disques plus petits.

Lemme 1. *Si $0 < r_0 < \infty$ et si la fonction $f \in \mathrm{H}_c(\Omega)$ est majorée par M_0 sur le disque fermé $\overline{\mathrm{D}(z_0, r_0)} \subset \Omega$, alors, dans le disque ouvert $\mathrm{D}(z_0, r_0)$, on a la majoration*

$$|f'(z)| \le \frac{\mathrm{M}_0\, r_0}{r_0^2 - |z|^2} \le \frac{\mathrm{M}_0}{r_0 - |z|}.$$

En conséquence, f est lipschitzienne dans les disques $\mathrm{D}(z_0, r_1)$ de rayon plus petit $r_1 < r_0$, de constante de Lipschitz C_1 vérifiant la majoration

$$\mathrm{C}_1 \le \frac{\mathrm{M}_0}{r_0 - r_1}.$$

Preuve. — Par translation, on peut supposer que $z_0 = 0$. Le disque compact $\overline{\mathrm{D}(0, r_0)}$ est contenu dans l'ouvert Ω, donc il existe $r > r_0$ tel que $\mathrm{D}(0, r) \subset \Omega$. Puisque f est holomorphe dans $\mathrm{D}(0, r)$, il existe des coefficients (a_n) tels que

$$\forall z \in \mathrm{D}(0, r), \quad f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n.$$

On va commencer par une preuve très simple, mais qui ne donne pas la bonne constante ; dans cette preuve, on peut déduire le caractère lipschitzien de f à partir de la majoration de la dérivée, mais en fait la preuve des deux faits utilise les mêmes inégalités. Pour tout $n \geq 0$, on a

$$|a_n| \, r_0^n \leq \mathrm{M}_0$$

par les inégalités de Cauchy. Si z_1, z_2 sont dans le disque plus petit de rayon r_1,

$$\left| z_1^n - z_2^n \right| = |z_1 - z_2| \left| z_1^{n-1} + z_1^{n-2} z_2 + \cdots + z_1 z_2^{n-2} + z_2^{n-1} \right| \leq |z_1 - z_2| \, n r_1^{n-1}.$$

Il en résulte que

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \Bigl(\sum_{n \geqslant 1} n |a_n| r_1^{n-1} \Bigr) |z_1 - z_2|$$

$$\leq \frac{\mathrm{M}_0}{r_0} \Bigl(\sum_{n \geqslant 1} n (r_1/r_0)^{n-1} \Bigr) |z_1 - z_2| = \frac{\mathrm{M}_0}{r_0} \frac{1}{(1 - r_1/r_0)^2} \, |z_1 - z_2| = \frac{\mathrm{M}_0 r_0}{(r_0 - r_1)^2} \, |z_1 - z_2|.$$

En faisant tendre z_2 vers z_1 on déduit une borne pour $|f'(z_1)|$,

$$|f'(z_1)| \leq \frac{\mathrm{M}_0 r_0}{(r_0 - r_1)^2}.$$

Cette première preuve très simple ne donne pas la bonne constante dans le lemme. Soit $z \in \mathrm{D}(0, r_0)$; la valeur

$$f'(z) = \sum_{n \geqslant 1} n a_n z^{n-1}$$

peut être obtenue comme le produit scalaire $\langle f_{r_0}, g_z \rangle$ dans l'espace $\mathrm{L}^2([0, 2\pi], \mu)$ de la fonction

$$f_{r_0} : t \in [0, 2\pi] \to f(r_0 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \sum_{n \geqslant 0} a_n r_0^n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$$

avec

$$g_z : t \in [0, 2\pi] \to \sum_{n \geqslant 1} n \frac{\overline{z}^{n-1}}{r_0^n} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{r_0} \, \frac{1}{\bigl(1 - (\overline{z}/r_0) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\bigr)^2}.$$

Alors

$$|f'(z)| = |\langle f_{r_0}, g_z \rangle| = \left| \int_0^{2\pi} f_{r_0}(t) \overline{g_z(t)} \, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \right| \leq \|f_{r_0}\|_\infty \|g_z\|_1 \leq \mathrm{M}_0 \, \|g_z\|_1,$$

et par l'égalité de Bessel, on a

$$\|g_z\|_1 = \frac{1}{r_0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|1 - (\overline{z}/r_0) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}s} \,|^2} \, \frac{\mathrm{d}s}{2\pi} = \frac{1}{r_0} \int_0^{2\pi} \Bigl| \sum_{n \geqslant 0} (\overline{z}/r_0)^n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}ns} \Bigr|^2 \, \frac{\mathrm{d}s}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{r_0} \sum_{n \geqslant 0} (|z|/r_0)^{2n} = \frac{r_0}{r_0^2 - |z|^2} \le \frac{1}{r_0 - |z|}.$$

Remarque. En fait la première preuve n'est pas si mauvaise, si on se rappelle que la majoration de Cauchy peut être raffinée sous la forme

$$|a_n|\, r_0^n \le \|f_{r_0}\|_1 = \int_0^{2\pi} |f(r_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\, \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi},$$

alors qu'on a utilisé $\mathrm{M}_0 = \|f_{r_0}\|_\infty$. La première preuve donne une majoration de $|f'(z)|$ par

$$\|f_{r_0}\|_1 \, \frac{r_0}{(r_0 - |z|)^2}, \quad \text{contre} \quad \frac{\|f_{r_0}\|_\infty}{r_0 - |z|}$$

pour la deuxième : les deux informations ont leur intérêt.

Holomorphie sous l'intégrale

Rappel. *On suppose que* $f(z, x)$ *est définie sur* $\Omega \times \mathrm{X}$, *que* $z \to f(z, x)$ *est dans* $\mathrm{H}_c(\Omega)$ *pour tout* $x \in \mathrm{X}$, *et que pour tout compact* K *de* Ω, *il existe une fonction* μ*-intégrable* g_K *sur* X *telle que*

$$\forall z \in \mathrm{K}, \quad |f(z, x)| \le g_\mathrm{K}(x).$$

On peut poser pour tout $z \in \Omega$

$$\mathrm{F}(z) = \int_\mathrm{X} f(z, x)\, \mathrm{d}\mu(x).$$

Alors $\mathrm{F} \in \mathrm{H}_c(\Omega)$ *et*

$$\mathrm{F}'(z) = \int_\mathrm{X} f'(z, x)\, \mathrm{d}\mu(x),$$

où $f'(z, x)$ *désigne la* $\mathbb{C}$*-dérivée de* $z \to f(z, x)$.

Preuve. — Au point $z_0 \in \Omega$, on trouve un disque compact $\overline{\mathrm{D}(z_0, r_0)} \subset \Omega$, $r_0 > 0$; par hypothèse il existe une fonction $g_0(x)$ intégrable telle que

$$\forall z \in \overline{\mathrm{D}(z_0, r_0)}, \quad |f(z, x)| \le g_0(x) ;$$

sur le disque plus petit $\mathrm{D}(z_0, r_0/2)$, on sait par le lemme 1 que la fonction $z \to f(z, x)$ est $2g_0(x)/r_0$-lipschitzienne. Si $(h_n) \subset \mathbb{C}$ tend vers 0, on aura $|h_n| < r_0/2$ pour n assez grand ; alors, pour $n \ge n_0$, on a pour tout $x \in \mathrm{X}$

$$\Bigl| \frac{f(z_0 + h_n, x) - f(z_0, x)}{h_n} \Bigr| \le 2g_0(x)/r_0,$$

majorant intégrable indépendant de n, alors que le quotient tend simplement vers la dérivée $f'(z_0, x)$ quand $n \to \infty$. On en déduit par convergence dominée que

$$\mathrm{F}'(z_0) = \int_\mathrm{X} f'(z_0, x)\, \mathrm{d}\mu(x).$$

On note que les hypothèses entraînent que F' est continue, en enchaînant avec la continuité de l'intégrale à paramètre qui contient $f'(z, x)$, qui est supposée continue en z par l'hypothèse $\{z \to f(z, x)\} \in \mathrm{H}_c(\Omega)$.

Chemins, primitives, homotopie

Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est un chemin continu de classe C^1 par morceaux, on dénote par γ^* (avec Rudin, ARC) son image $\gamma([a,b])$ dans le plan complexe. La longueur parcourue par la trajectoire $t \to \gamma(t)$ sera notée

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t$$

(cela tient compte du nombre de tours, si γ^* est un cercle).

Majoration d'une intégrale curviligne,

$$\Bigl| \int_\gamma f(z)\,dz \Bigr| \le \ell(\gamma) \max\{|f(z)| : z \in \gamma^*\}.$$

Rappel : si γ est un chemin continu et de classe C^1 par morceaux, tracé dans un ouvert Ω, et si $f \in \mathrm{H}_c(\Omega)$, on a

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

En particulier, l'intégrale est nulle quand le chemin γ est fermé.

Indice

Proposition. *Si γ est un lacet et $z_0 \notin \gamma^*$,*

$$\frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

est un entier relatif, continu en z_0, nul quand $|z_0|$ tend vers l'infini (précisément, nul dès que $|z_0| > \max\{|w| : w \in \gamma^*\}$). L'indice est constant sur chaque composante connexe de l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Preuve. — On considère $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, continu de classe C^1 par morceaux, $\gamma(b) = \gamma(a)$; on pose pour $t \in [a,b]$,

$$g(t) = (\gamma(t) - z_0) \exp\Bigl(- \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} \,\mathrm{d}s \Bigr).$$

Sur tout sous-intervalle où γ est C^1, la dérivée de g est nulle, donc g est constante. On raccorde les sous-intervalles par continuité, et on en déduit que g est constante sur $[a,b]$. En comparant les résultats en a et en b, et en utilisant $\gamma(b) = \gamma(a)$, on obtient

$$\frac{g(a)}{\gamma(a) - z_0} = 1 = \frac{g(b)}{\gamma(b) - z_0} = \exp\Bigl(- \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} \,\mathrm{d}s \Bigr) = \exp\Bigl(- \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} \Bigr).$$

Il en résulte que la quantité dans l'exponentielle est de la forme $2\mathrm{i}\pi k$, pour un $k \in \mathbb{Z}$.

Par les propriétés de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre, il est clair que l'indice est fonction continue de z_0, il est donc localement constant puisqu'il est à valeurs entières. On voit de plus que l'intégrale qui définit l'indice tend vers 0 quand $|z_0|$ tend vers l'infini, donc elle devient nulle puisqu'elle est égale à un entier.

Homotopie

Dans les questions d'homotopie, on a deux chemins γ_0 et γ_1 de $[0,1]$ dans un ouvert Ω, et une déformation continue γ_s de l'un vers l'autre, où $\gamma_s : [0,1] \to \Omega$ est un chemin continu pour tout $s \in [0,1]$, qui varie continûment de γ_0 à γ_1 quand s varie de 0 à 1. Cela donne finalement une application continue $\varphi(s,t)$ du carré $[0,1]^2$ dans Ω,

$$\varphi(s,t) = \gamma_s(t).$$

C'est une des raisons d'être de l'étude qui sera faite dans cette section.

Le cas le plus important est celui d'une variation de lacets. Dans ce cas chaque γ_s est fermé : on a $\gamma_s(0) = \gamma_s(1)$ pour tout s ; dire que les intégrales sur les lacets sont les mêmes pour γ_0 et γ_1,

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz,$$

peut s'interpréter en disant que l'intégrale sur le chemin α composé de :

$s \to \gamma_s(0)$, de $\gamma_0(0)$ à $\gamma_1(0)$, suivi de $t \to \gamma_1(t)$ de $\gamma_1(0)$ à $\gamma_1(1)$,

donne le même résultat que l'intégrale sur le chemin β composé de :

$t \to \gamma_0(t)$ de $\gamma_0(0)$ à $\gamma_0(1) = \gamma_0(0)$, suivi de $s \to \gamma_s(1) = \gamma_s(0)$, qui est identique au premier morceau du premier chemin α.

En « ajoutant » le chemin α à l'opposé du chemin β (on parcourt β à l'envers, de l'extrémité à l'origine) cette égalité s'interprète comme la nullité d'une intégrale de f sur le chemin fermé φ^{K} obtenu en composant avec $\varphi(s,t) = \gamma_s(t)$ le parcours du bord du carré $\mathrm{K} = [0,1]^2$,

$$\int_{\varphi^{\mathrm{K}}} f(z)\,dz = \int_\alpha f(z)\,dz - \int_\beta f(z)\,dz = 0.$$

Supposons donc donnée une application $\varphi : [0,1]^2 \to \Omega$, de classe C^1 au sens qu'elle a des dérivées partielles continues dans le carré ouvert, qui se prolongent par continuité au carré fermé $\mathrm{K} = [0,1]^2$; on notera pour deux points A, B du carré K

$$\varphi_{\mathrm{A,B}}(t) = \varphi((1-t)\mathrm{A} + t\mathrm{B}), \quad t \in [0,1].$$

Si f est une fonction continue dans Ω, on posera

$$\Phi_{\mathrm{A,B}}(f) = \int_{\varphi_{\mathrm{A,B}}} f(z)\,dz.$$

On a $\Phi_{\mathrm{A,A}} = 0$, parce que $\varphi'_{\mathrm{A,A}} = 0$. Si les trois points A, B et C du carré K sont alignés, on a $\Phi_{\mathrm{A,C}} = \Phi_{\mathrm{A,B}} + \Phi_{\mathrm{B,C}}$ par la relation de Chasles des intégrales sur la droite réelle ; en particulier $\Phi_{\mathrm{A,B}} + \Phi_{\mathrm{B,A}} = 0$.

Détaillons l'appel à Chasles : si v est un vecteur directeur pour la droite portant les points $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ et si O est un point de cette droite, choisi comme origine, on peut écrire

$$\mathrm{A} = \mathrm{O} + av\,; \ \mathrm{B} = \mathrm{O} + bv\,; \ \mathrm{C} = \mathrm{O} + cv\,;$$

on a par exemple

$$\Phi_{\mathrm{A,B}}(f) = \int_0^1 f(\varphi((1-t)\mathrm{A} + t\mathrm{B}))\nabla\varphi((1-t)\mathrm{A} + t\mathrm{B}) \cdot (\mathrm{B} - \mathrm{A})\,dt$$

et en posant $s = (1-t)a + tb$ qui varie de a à b,

$$\Phi_{\mathrm{A,B}}(f) = \int_a^b f(\varphi(\mathrm{O} + sv))\nabla\varphi(\mathrm{O} + sv) \cdot v \,\mathrm{d}s,$$

et de même pour BC, AC ; sous cette forme on peut appliquer Chasles aux intégrales sur les segments réels $[a, b]$ et $[b, c]$.

On considère la famille $\mathcal{R}$ des rectangles R contenus dans K, de côtés parallèles aux axes et dont le grand côté ℓ_1 (qui peut être horizontal ou vertical) vérifie $\ell_1 \le 2\ell_2$, ℓ_2 étant le petit côté. Notons que les côtés du rectangle vérifient

$$\ell_1^2 \le 2\ell_1\ell_2 = 2|\mathrm{R}|, \quad \ell_2^2 \le \ell_1\ell_2 = |\mathrm{R}|,$$

où $|\mathrm{R}|$ désigne la surface du rectangle R. On aura donc pour le diamètre diam(R) du rectangle R l'inégalité

$$\mathrm{diam}^2(\mathrm{R}) = \ell_1^2 + \ell_2^2 \le 3|\mathrm{R}|. \tag{2}$$

On dira pour abréger qu'un tel rectangle R est *acceptable*.

Si R a pour sommets A, $\mathrm{B} = \mathrm{A} + (\sigma, 0)$, $\mathrm{C} = \mathrm{A} + (\sigma, \tau)$ et $\mathrm{D} = \mathrm{A} + (0, \tau)$, $\sigma, \tau > 0$, on notera $\mathrm{R} = \mathrm{Rect}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D})$ et on posera

$$\Phi^{\mathrm{R}} = \Phi_{\mathrm{A,B}} + \Phi_{\mathrm{B,C}} + \Phi_{\mathrm{C,D}} + \Phi_{\mathrm{D,A}}.$$

Notons que $\Phi^{\mathrm{R}}(f)$ est l'intégrale de f sur le chemin fermé $\varphi \circ \gamma^{\mathrm{R}}$, composition de φ avec le parcours γ^{R} du bord du rectangle : γ^{R} est le chemin fermé qui parcourt d'abord le segment [AB], puis [BC], [CD] et [DA].

Lemme. *Pour tout rectangle acceptable* R*, il existe un découpage de* R *en deux rectangles acceptables* R' *et* R'' *de surface moitié, tel que*

$$\Phi^{\mathrm{R}} = \Phi^{\mathrm{R}'} + \Phi^{\mathrm{R}''}.$$

Preuve. — Écrivons $\mathrm{R} = (\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D})$ et supposons que $\ell_1 = |\mathrm{AB}| = |\mathrm{CD}|$ soit le grand côté. On introduit les milieux M de AB et N de CD, puis $\mathrm{R}' = \mathrm{Rect}(\mathrm{A}, \mathrm{M}, \mathrm{N}, \mathrm{D})$ et $\mathrm{R}'' = \mathrm{Rect}(\mathrm{M}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{N})$. Alors,

$$|\mathrm{AM}| = \ell_1/2 \le \ell_2 = |\mathrm{DA}|,$$

donc $|\mathrm{AM}| = |\mathrm{ND}| = \ell_1/2$ est le petit côté de R', $\ell_2 = |\mathrm{MN}| = |\mathrm{DA}|$ le grand côté et

$$|\mathrm{DA}| = \ell_2 \le \ell_1 = 2|\mathrm{AM}|$$

donc R' est un rectangle acceptable, et de même pour R''. La surface de R' et de R'' est égale à

$$|\mathrm{DA}|\,|\mathrm{AM}| = \ell_2\ell_1/2 = |\mathrm{R}|/2.$$

De plus,

$$\Phi^{\mathrm{R}'} + \Phi^{\mathrm{R}''} = \bigl(\Phi_{\mathrm{A,M}} + \Phi_{\mathrm{M,N}} + \Phi_{\mathrm{N,D}} + \Phi_{\mathrm{D,A}}\bigr) + \bigl(\Phi_{\mathrm{M,B}} + \Phi_{\mathrm{B,C}} + \Phi_{\mathrm{C,N}} + \Phi_{\mathrm{N,M}}\bigr)$$

$$= \Phi_{\mathrm{A,M}} + \Phi_{\mathrm{M,B}} + \Phi_{\mathrm{B,C}} + \Phi_{\mathrm{C,N}} + \Phi_{\mathrm{N,D}} + \Phi_{\mathrm{D,A}} + \Phi_{\mathrm{M,N}} + \Phi_{\mathrm{N,M}} = \Phi^{\mathrm{R}}.$$

Théorème. *Si φ est une application de classe C^1 du carré $\mathrm{K} = [0,1]^2$ dans Ω, alors*

$$\int_{\varphi^{\mathrm{K}}} f(z)\,dz = 0$$

pour toute fonction $f \in \mathrm{H}(\Omega)$, où $\varphi^{\mathrm{K}} = \varphi \circ \gamma^{\mathrm{K}}$ est la composition de l'application φ avec le parcours γ^{K} du bord du carré K.

Remarque. On ne suppose pas ici que f' soit continue : on est en route pour la preuve du théorème de Goursat, $\mathrm{H}_c(\Omega) = \mathrm{H}(\Omega)$.

Preuve. — On note que

$$\int_{\varphi^{\mathrm{K}}} f(z)\,dz = \Phi^{\mathrm{K}}(f).$$

Pour chaque rectangle acceptable $\mathrm{R} \in \mathcal{R}$ on va s'intéresser au quotient

$$\mathrm{Q}(\mathrm{R}) = \frac{1}{|\mathrm{R}|}\Bigl|\int_{\varphi^{\mathrm{R}}} f(z)\,dz\Bigr| = \frac{|\Phi^{\mathrm{R}}(f)|}{|\mathrm{R}|}.$$

On va construire par récurrence une suite (R_n) décroissante de rectangles acceptables, en commençant avec $\mathrm{R}_0 = \mathrm{K}$, de façon que $|\mathrm{R}_n| = 2^{-n}$ pour tout $n \geq 0$ et

$$\mathrm{Q}(\mathrm{R}_n) = \frac{|\Phi^{\mathrm{R}_n}(f)|}{|\mathrm{R}_n|} = 2^n|\Phi^{\mathrm{R}_n}(f)|$$

soit croissant au sens large.

D'après le lemme, on peut découper le rectangle acceptable $\mathrm{R} = \mathrm{R}_n$, de surface 2^{-n}, en R' et R'' de surfaces moitié, et de façon que

$$\frac{|\Phi^{\mathrm{R}}(f)|}{|\mathrm{R}|} = 2^n|\Phi^{\mathrm{R}}(f)| = \frac{2^{n+1}}{2}\bigl(|\Phi^{\mathrm{R}'}(f)| + |\Phi^{\mathrm{R}''}(f)|\bigr) = \frac{1}{2}\Bigl(\frac{|\Phi^{\mathrm{R}'}(f)|}{|\mathrm{R}'|} + \frac{|\Phi^{\mathrm{R}''}(f)|}{|\mathrm{R}''|}\Bigr).$$

Il en résulte que le quotient est supérieur ou égal à celui de R, pour R' ou pour R''. On désigne par R_{n+1} celui des deux qui a le plus grand quotient. La possibilité de la récurrence est établie : on a $\mathrm{Q}(\mathrm{R}_n) \leq \mathrm{Q}(\mathrm{R}_{n+1})$. Les surfaces des R_n, égales à 2^{-n}, tendent vers 0, donc les diamètres aussi par (2). Résumons l'état des choses.

Affirmation 1. *Il existe une suite décroissante (R_n) de rectangles acceptables contenus dans* K, *dont les diamètres tendent vers* 0, *tels que $\mathrm{R}_0 = \mathrm{K}$ et que la suite $(\mathrm{Q}(\mathrm{R}_n))$ soit croissante au sens large.*

Si P_0 est l'unique point de l'intersection des (R_n), on pose $p_0 = \varphi(\mathrm{P}_0) \in \Omega$ et on va utiliser la $\mathbb{C}$-dérivabilité de f en p_0 pour amener le deuxième point.

Affirmation 2. *Si (R_n) est une suite décroissante de rectangles acceptables dont les diamètres tendent vers* 0, *alors*

$$\lim_n \mathrm{Q}(\mathrm{R}_n) = 0.$$

L'addition de ces deux faits donne immédiatement $\mathrm{Q}(\mathrm{K}) = \mathrm{Q}(\mathrm{R}_0) = 0$, ce qui terminera la preuve.

Preuve de l'affirmation 2. — On a noté P_0 l'unique point de l'intersection des (R_n), et $p_0 = \varphi(\mathrm{P}_0) \in \Omega$. D'après la $\mathbb{C}$-dérivabilité de f au point p_0, le nombre $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe un voisinage U de p_0 et un polynôme du premier degré $g(z) = a + bz$ tels que

$$\forall z \in \mathrm{U}, \quad |f(z) - g(z)| \le \varepsilon |z - p_0|. \tag{3}$$

Alors g est continue, c'est la dérivée complexe de la fonction $\mathrm{G}(z) = az + bz^2/2$; pour tout rectangle $\mathrm{R} \in \mathcal{R}$, φ^{R} est un chemin fermé, donc

$$\Phi^{\mathrm{R}}(g) = \int_{\varphi^{\mathrm{R}}} g(z)\,dz = \int_{\varphi^{\mathrm{R}}} \mathrm{G}'(z)\,dz = 0.$$

Par ailleurs, comme φ est continue au point P_0, il existe un voisinage V de P_0 tel que $\varphi(\mathrm{V}) \subset \mathrm{U}$; pour n assez grand le rectangle R_n est contenu dans V, donc

$$\Big|\int_{\varphi^{\mathrm{R}_n}} (f(z) - g(z))\,dz\Big| \le \ell(\varphi^{\mathrm{R}_n}) \max\{|f(z) - g(z)| : z \in \varphi(\partial \mathrm{R}_n)\}.$$

Comme φ est de classe C^1 sur le compact K, ses dérivées partielles continues sont bornées sur K, et il en résulte qu'il existe M tel que φ soit M-lipschitzienne. Par conséquent, la longueur de φ^{R_n} est majorée par M fois le périmètre de R_n, lui-même plus petit que 4 fois le diamètre,

$$\ell(\varphi^{\mathrm{R}_n}) \le 4\mathrm{M}\,\mathrm{diam}(\mathrm{R}_n).$$

Si $z = \varphi(\mathrm{P})$ avec $\mathrm{P} \in \mathrm{R}_n$, alors $|z - z_0| = |\varphi(\mathrm{P}) - \varphi(\mathrm{P}_0)| \le \mathrm{M}\,\mathrm{diam}(\mathrm{R}_n)$ et puisque $z \in \varphi(\mathrm{V}) \subset \mathrm{U}$ on a d'après (3)

$$|f(z) - g(z)| \le \varepsilon \mathrm{M}\,\mathrm{diam}(\mathrm{R}_n).$$

Finalement, comme l'intégrale de g est nulle

$$|\Phi^{\mathrm{R}_n}(f)| = \Big|\int_{\varphi^{\mathrm{R}_n}} f(z)\,dz\Big| = \Big|\int_{\varphi^{\mathrm{R}_n}} (f(z) - g(z))\,dz\Big| \le 4\mathrm{M}^2\,\mathrm{diam}^2(\mathrm{R}_n)\varepsilon \le 12\mathrm{M}^2\,|\mathrm{R}_n|\varepsilon,$$

ce qui implique que le quotient est petit,

$$\mathrm{Q}(\mathrm{R}_n) = \frac{\big|\Phi^{\mathrm{R}_n}(f)\big|}{|\mathrm{R}_n|} \le 12\mathrm{M}^2\varepsilon,$$

pour tout n assez grand ; comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a bien obtenu que $\mathrm{Q}(\mathrm{R}_n)$ tend vers 0.