cours 6, le 9 décembre 2009

Rappel du théorème d'approximation par convolution : *si* $(f_n) \subset \mathrm{L}^1(\mathrm{G}, \mu)$ *est une approximation de l'unité et* g *une fonction uniformément continue sur* G, *alors* $f_n * g$ *converge uniformément vers* g *; si* $g \in \mathrm{L}^p(\mathrm{G}, \mu)$, $1 \le p < \infty$, *la suite* $(f_n * g)$ *converge vers* g *dans* L^p.

Si φ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^d$, d'intégrale 1, on peut considérer l'unité approchée donnée par la suite $f_n(x) = n^d \varphi(nx)$, $n \ge 1$; cet exemple devient, dans le cas gaussien sur $\mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \,\mathrm{e}^{-x^2/2}, \quad g_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \,\mathrm{e}^{-n^2 x^2/2} \,;$$

et dans $\mathbb{R}^d$,

$$g_{n,d}(x) = \Bigl(\frac{n}{\sqrt{2\pi}}\Bigr)^d \,\mathrm{e}^{-n^2 |x|^2/2} \,.$$

Exercice : il n'existe pas de vraie unité pour la convolution dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de fonction $e \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $e * f = f$ pour toute $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Solution avec la transformation de Fourier : on aurait $\widehat{e}\,\widehat{f} = \widehat{f}$, donc $\widehat{e}(y) = 1$ en tout point y où $\widehat{f}(y) \ne 0$. Si on prend pour f une gaussienne, la transformée de Fourier $\widehat{f}$ ne s'annule jamais (voir plus loin), donc $\widehat{e} = 1$ partout. Mais cela contredit le théorème de Riemann-Lebesgue, selon lequel la transformée de Fourier d'une fonction $e \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ tend vers 0 à l'infini.

Le raisonnement fonctionne à l'identique dans $\mathbb{R}^d$; le résultat est le même aussi dans le cas périodique (lorsque $\mathrm{G} = \mathbb{T}$, en utilisant Riemann-Lebesgue pour les coefficients de Fourier), mais pas pour $\mathrm{G} = \mathbb{Z}$: la « fonction » e sur $\mathbb{Z}$ égale à 1 en 0, et nulle aux autres entiers, est l'unité de la convolution sur $\mathbb{Z}$ (et sa transformée de Fourier est la fonction constante $\mathbf{1}$ sur le cercle $\mathbb{T}$).

Exemple : *théorème d'approximation de Weierstrass par convolution avec des gaussiennes* ; si F est une fonction uniformément continue bornée (UCB) sur $\mathbb{R}$, et (g_n) l'approximation de l'unité gaussienne introduite ci-dessus, la suite $\mathrm{F}_n = \mathrm{F} * g_n$ tend uniformément vers F sur $\mathbb{R}$, et on peut montrer par interversion série-intégrale que chaque F_n est une fonction entière, par conséquent la fonction F_n elle-même est approchable par des polynômes, uniformément sur tout compact.

Si on commence avec une fonction f continue sur $[a, b]$, on peut la prolonger en fonction F sur $\mathbb{R}$, uniformément continue et bornée, en posant $\mathrm{F}(x) = f(a)$ quand $x \le a$ et $\mathrm{F}(x) = f(b)$ quand $x \ge b$.

Le cas périodique : théorème de Fejér

Les *sommes de Fejér* sont obtenues en faisant les moyennes de Cesàro des sommes de Fourier usuelles : si f est une fonction 2π-périodique localement intégrable, on définit pour tout $n \ge 0$ le polynôme trigonométrique $\sigma_n f$, n-ième somme de Fejér de f, par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\sigma_n f)(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{S}_k f)(x),$$

et de façon analogue, le noyau de Fejér est obtenu à partir des noyaux de Dirichlet,

$$\mathrm{K}_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{D}_k(x).$$

Comme chaque D_k est d'intégrale 1 pour la probabilité $\mathrm{d}\mu(x) = \mathrm{d}x/(2\pi)$, il en est de même pour K_n. On a bien sûr

$$\sigma_n f = \mathrm{K}_n * f,$$

la convolution s'entendant comme convolution périodique. On peut exprimer les coefficients de $\sigma_n f$ à partir des coefficients de Fourier $(c_\ell(f))_{\ell \in \mathbb{Z}}$ de f et de ceux de K_n : il faut d'abord calculer les coefficients du polynôme trigonométrique K_n, en écrivant

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{D}_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=-k}^{k} e_\ell = \sum_{k,\ell} \mathbf{1}_{0 \le |\ell| \le k \le n}\, e_\ell = \sum_{\ell=-n}^{n} (n+1-|\ell|)\, e_\ell,$$

donc

$$\mathrm{K}_n = \sum_{\ell=-n}^{n} \Bigl(1 - \frac{|\ell|}{n+1}\Bigr) e_\ell.$$

Par conséquent

$$\sigma_n f = \sum_{\ell=-n}^{n} \Bigl(1 - \frac{|\ell|}{n+1}\Bigr) c_\ell(f) e_\ell. \tag{1}$$

Calcul de K_n avec une somme de sinus : pour chaque $k = 0, \ldots, n$, on a

$$2\sin(kx + x/2)\sin(x/2) = \cos(kx) - \cos(kx + x)\,;$$

la formule du produit de sinus vient de

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}}{2\mathrm{i}} \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}b}}{2\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(a+b)}}{4} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a-b)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(a-b)}}{4}.$$

On obtient avec cette somme « télescopique », en ayant rappelé pour commencer que $\sin(x/2)\mathrm{D}_k(x) = \sin(kx + x/2)$ pour tout $k \ge 0$,

$$2\sin^2(x/2) \sum_{k=0}^{n} \mathrm{D}_k(x) = 1 - \cos(nx + x) = 2\sin(nx/2 + x/2)^2,$$

donc

$$\mathrm{K}_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{D}_k(x) = \frac{\sin(nx/2 + x/2)^2}{(n+1)\sin(x/2)^2}.$$

On note que $\mathrm{K}_n \ge 0$, la condition (b) des approximations de l'unité est donc automatique. Enfin, K_n tend *uniformément* vers 0 en dehors de $(-\delta, \delta)$,

$$0 < \delta \le |x| \le \pi \Rightarrow \mathrm{K}_n(x) \le \frac{1}{(n+1)\sin(\delta/2)^2},$$

majorant indépendant de x, qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Il en résulte que l'intégrale de K_n hors de $(-\delta, \delta)$ tend vers 0 elle aussi (la mesure μ étant finie), donc la condition (c) des unités approchées est vérifiée. On obtient, comme conséquence du principe général d'approximation, le théorème de Fejér (apparu vers 1900).

Théorème de Fejér. *Si f est continue 2π-périodique, les sommes de Fejér $(\sigma_n f)$ tendent uniformément vers f. Si f est dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{T}, \mu)$, $1 \le p < +\infty$, les sommes $(\sigma_n f)$ tendent dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{T}, \mu)$ vers f.*

Conséquences

– Injectivité de Fourier sur $\mathbb{T}$: si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ et si $c_j(f) = 0$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$, il en résulte que $\sigma_n f = 0$ pour tout $n \ge 0$ (utiliser la formule (1)), donc la limite f dans L^1 de la suite $(\sigma_n f)$ est nulle.

– Une utilisation du théorème de Cesàro pour les fonctions continues : si f est continue 2π-périodique et si $(\mathrm{S}_n f)(x_0)$ tend vers une limite ℓ, alors $\ell = f(x_0)$.

Plus sur Fourier

Rappel de définition, sur $\mathbb{R}$, ou plus généralement sur $\mathbb{R}^d$: si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^d$, on pose pour tout $y \in \mathbb{R}^d$

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x\cdot y}\,\mathrm{d}x.$$

On note que

$$\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Le cas de fonctions de plusieurs variables « décomposées » en produit de fonctions ne dépendant que de certaines des variables mérite d'être signalé. Si f_1 et f_2 sont deux fonctions d'une variable, posons $(f_1 \otimes f_2)(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$; alors

$$(\widehat{f_1 \otimes f_2})(y_1, y_2) = \int_{\mathbb{R}^2} f_1(x_1) f_2(x_2)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_1y_1 - \mathrm{i}x_2y_2}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = (\widehat{f_1} \otimes \widehat{f_2})(y_1, y_2).$$

Rappel. La preuve de la continuité de $\widehat{f}$, $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, est facile par Lebesgue dominé.

Théorème : Riemann-Lebesgue. *Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, la transformée de Fourier $\widehat{f}$ tend vers 0 à l'infini.*

Preuve. — On a déjà vu le cas $d = 1$. Quand $d = 2$, les indicatrices de rectangles sont de la forme $f_1 \otimes f_2$, ce qui permet de déduire le résultat de la dimension 1. Ensuite, on utilise la densité des combinaisons linéaires d'indicatrices de rectangles.

Changements de variables linéaires

Effet des translations,

$$\widehat{\tau_h f}(y) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,h\cdot y}\,\widehat{f}(y),$$

et l'image de Fourier de $x \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,h\cdot x}\,f(x)$ est $\tau_h \widehat{f}$.

Effet des homothéties sur les approximations de l'identité habituelles : pour tout $a > 0$, définissons la fonction f_a par $f_a(x) = a^d f(ax)$. Alors

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{f_a}(y) = \widehat{f}(y/a).$$

Symboliquement,

$$\{x \to a^d f(ax)\} \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} \{y \to \widehat{f}(y/a)\}.$$

Fourier et dérivations

Dériver la transformée de Fourier est facile : il suffit de dériver sous l'intégrale.

Proposition. *Si f et toutes les fonctions $g_j : x \in \mathbb{R}^d \to x_j f(x)$, $j = 1, \ldots, d$, sont intégrables sur $\mathbb{R}^d$, alors $\widehat{f}$ est de classe C^1 et*

$$(\mathrm{D}_j \widehat{f})(y) = -\mathrm{i}\,\widehat{g_j}(y) = -\mathrm{i} \int_{\mathbb{R}^d} x_j f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, x\cdot y}\, \mathrm{d}x,$$

ou encore

$$\mathrm{D}_j \widehat{f} = -\mathrm{i}\ \widehat{\{x \to x_j f(x)\}}.$$

Inversement : on va montrer que

$$(\widehat{\mathrm{D}_j f})(y) = \mathrm{i} y_j \widehat{f}(y)$$

lorsque f est de classe C^1 et que $f, \mathrm{D}_j f$ sont intégrables. On commence par un lemme en une seule variable, qui a des cas particuliers évidents : si g est de classe C^1 à support compact sur $\mathbb{R}$, alors $\int_{\mathbb{R}} g'(t)\, \mathrm{d}t = 0$.

Lemme. *Si g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec g et g' intégrables sur $\mathbb{R}$, alors*

$$\int_{\mathbb{R}} g'(t)\, \mathrm{d}t = 0.$$

Preuve. — On déduit de l'hypothèse que g tend vers des limites en $\pm\infty$,

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = g(0) + \int_0^{+\infty} g'(t)\, \mathrm{d}t,$$

et de même en $-\infty$; si $g \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ pour un $p < \infty$, il en résulte que ces deux limites sont nulles, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g'(t)\, \mathrm{d}t = 0.$$

Remarque. Pour pouvoir écrire $g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t)\, \mathrm{d}t$ pour tous a, b, il suffit que la dérivée $g'(x)$ existe *pour tout* x et que g' soit Lebesgue-intégrable (d'après Rudin, ARC, Chap. ?).

Pour obtenir l'existence des limites de g en $\pm\infty$, il suffit de savoir que g' admet une intégrale semi-convergente sur $\mathbb{R}$.

Lemme. *Si g admet une dérivée partielle continue $\mathrm{D}_j g$ partout sur $\mathbb{R}^d$ ($1 \le j \le d$), si g et $\mathrm{D}_j g$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^d$, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathrm{D}_j g)(t)\, \mathrm{d}t = 0.$$

Preuve. — Écrivons le cas $d = 2$, $j = 1$. Comme g et $\mathrm{D}_1 g$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^2$, il résulte de Fubini qu'il existe un ensemble négligeable N tel que

$$g_{x_2} : x_1 \to g(x_1, x_2), \quad \text{et} \quad x_1 \to (\mathrm{D}_1 g)(x_1, x_2)$$

soient intégrables sur $\mathbb{R}$ pour tout $x_2 \notin \mathrm{N}$, c'est-à-dire presque tout x_2 ; pour un tel $x_2 \notin \mathrm{N}$, on peut appliquer le cas de dimension un : la fonction g_{x_2} est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, intégrable, et sa dérivée $x_1 \to (\mathrm{D}_1 g)(x_1, x_2)$ est intégrable aussi, donc par le lemme précédent

$$\int_{\mathbb{R}} (\mathrm{D}_1 g)(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1 = 0.$$

Par une deuxième intégration on obtient le résultat,

$$\int_{\mathbb{R}} \Bigl(\int_{\mathbb{R}} (\mathrm{D}_1 g)(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1 \Bigr)\,\mathrm{d}x_2 = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{D}_1 g = 0.$$

Comme conséquence, on calcule la transformée de Fourier de $\mathrm{D}_j f$.

Proposition. *Si f admet une dérivée partielle continue $\mathrm{D}_j f$ partout sur $\mathbb{R}^d$ ($1 \le j \le d$), si f et $\mathrm{D}_j f$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^d$, on a*

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \quad (\widehat{\mathrm{D}_j f})(y) = \mathrm{i} y_j \widehat{f}(y).$$

Preuve. — En posant $g(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x\cdot y}$ on obtient

$$0 = \int_{\mathbb{R}^d} (\mathrm{D}_j g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \bigl((\mathrm{D}_j f)(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x\cdot y} - \mathrm{i} y_j f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x\cdot y} \bigr)\,\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire

$$(\widehat{\mathrm{D}_j f})(y) = \mathrm{i} y_j \widehat{f}(y).$$

Fourier des gaussiennes

Sur $\mathbb{R}$, on peut déterminer la transformée de Fourier des fonctions gaussiennes en utilisant une équation différentielle. La dérivée de $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ est $-x g(x)$, par dérivée de Fourier et Fourier de dérivée on obtient pour $\mathrm{G}(y) = \widehat{g}(y)$

$$\mathrm{G}'(y) = \mathrm{i}\widehat{g'}(y) = -y\mathrm{G}(y)$$

et $\mathrm{G}(0) = \int_{\mathbb{R}} g = \sqrt{2\pi}$ permet de conclure,

$$\{x \to \mathrm{e}^{-x^2/2}\} \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} \{y \to \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-y^2/2}\}.$$

Dans le cas $\mathbb{R}^d$, en posant $|x|^2 = \sum_{j=1}^d x_j^2$,

$$\{x \to \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\,\mathrm{e}^{-|x|^2/2}\} \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} \{y \to \mathrm{e}^{-|y|^2/2}\}$$

et si on change de variable, pour tout $\sigma > 0$ on a

$$\{x \to \frac{1}{\sigma(2\pi)^{d/2}}\,\mathrm{e}^{-|x|^2/(2\sigma^2)}\} \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} \{y \to \mathrm{e}^{-\sigma^2|y|^2/2}\}.$$

Inversion de la transformation de Fourier

Lemme : formule d'échange : *si* $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, *on a*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\widehat{g}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Preuve. — Comme f et g sont intégrables, Fubini positif donne

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \Bigl(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\,\mathrm{d}x\Bigr)\Bigl(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|\,\mathrm{d}y\Bigr) < +\infty\,;$$

la fonction $(x, y) \to f(x)g(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x\cdot y}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, et on peut par conséquent appliquer Fubini à l'intégrale en $d + d$ variables

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x\cdot y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,;$$

on obtient la gauche ou la droite de l'égalité voulue, selon l'ordre des intégrations.

Théorème. *Si f et $\widehat{f}$ sont intégrables, la classe f admet le représentant continu*

$$x \to \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\cdot y}\,\mathrm{d}y.$$

Si la fonction f est déjà donnée comme une fonction continue, on a pour tout x

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\cdot y}\,\mathrm{d}y.$$

Preuve. — On reprend les notations

$$g(x) = (2\pi)^{-d/2}\,\mathrm{e}^{-|x|^2/2}, \quad g_a(x) = a^d g(ax).$$

On rappelle que (g_n) est une unité approchée. On applique la formule d'échange à des fonctions de type gaussien,

$$h_\varepsilon(y) = \mathrm{e}^{-\varepsilon^2|y|^2/2+\mathrm{i}\,x_0\cdot y}$$

pour un $\varepsilon > 0$ qui tendra vers 0. On trouve en posant $u = \varepsilon y$

$$\begin{aligned}\widehat{h}_\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\varepsilon^2|y|^2/2+\mathrm{i}\,(x_0-x)\cdot y}\,\mathrm{d}y = \varepsilon^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-|u|^2/2+\mathrm{i}\,\varepsilon^{-1}(x_0-x)\cdot u}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{(2\pi)^{d/2}}{\varepsilon^d}\,\mathrm{e}^{-(x-x_0)^2/(2\varepsilon^2)} = (2\pi)^d g_{\varepsilon^{-1}}(x - x_0).\end{aligned}$$

Par la formule d'échange, on a pour tout x_0

$$(2\pi)^d(f * g_{\varepsilon^{-1}})(x_0) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\widehat{h}_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(y)\,\mathrm{e}^{-\varepsilon^2|y|^2/2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x_0\cdot y}\,\mathrm{d}y.$$

Quand ε tend vers 0, le terme de droite tend vers

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x_0\cdot y}\,\mathrm{d}y$$

par convergence dominée. Si on spécialise en prenant $\varepsilon = 1/n$, on conclut que la suite $(2\pi)^d(f * g_n)(x)$ converge simplement, pour tout x, vers $\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\cdot y}\,\mathrm{d}y$; mais on sait aussi que $(2\pi)^d(f * g_n)$ tend vers $(2\pi)^d f$ au sens de L^1, par le théorème d'approximation par convolution. On en déduit le résultat ponctuel en passant à des sous-suites presque partout convergentes.

Parseval pour $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$

Si f et $\widehat{f}$ sont dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, on peut supposer que $f(x)$ est donné par le représentant continu qui est fourni par la formule d'inversion de Fourier. On peut alors écrire

$$(2\pi)^d\,\overline{f(x)} = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\widehat{f}(y)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x\cdot y}\,\mathrm{d}y,$$

ce qui montre que $(2\pi)^d\,\overline{f}$ est la transformée de Fourier de la fonction complexe conjuguée de $\widehat{f}$. Avec le lemme d'échange on obtient

$$(2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(y)\overline{\widehat{f}(y)}\,\mathrm{d}y,$$

c'est-à-dire

$$\|\widehat{f}\|_2^2 = (2\pi)^d \|f\|_2^2. \tag{2}$$

Lemme : égalité de Parseval. *Si* $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, *la transformée de Fourier* $\widehat{f}$ *est dans* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ *et*

$$\|\widehat{f}\|_2^2 = (2\pi)^d \|f\|_2^2.$$

Preuve. — Reprenons l'unité approchée gaussienne (g_n) ; l'un de ses intérêts est que les transformées de Fourier $\widehat{g}_n$ sont intégrables. Si f est dans $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$, alors $f_n = f * g_n$ est aussi dans L^1, son Fourier $\widehat{f}\,\widehat{g}_n$ est dans L^1 ($\widehat{f}$ est bornée et $\widehat{g}_n$ intégrable) donc

$$\|\widehat{f_n}\|_2^2 = (2\pi)^d \|f_n\|_2^2$$

par l'équation (2), et de même pour les différences, pour tous m, n

$$\|\widehat{f_m} - \widehat{f_n}\|_2^2 = (2\pi)^d \|f_m - f_n\|_2^2. \tag{3}$$

Comme f est à la fois dans L^1 et dans L^2, la suite (f_n) tend vers f dans L^1 *et* dans L^2, en appliquant deux fois le théorème d'approximation par convolution, donc (f_n) est de Cauchy dans L^2 ; de la convergence L^1 des (f_n) résulte que $\widehat{f_n}$ tend uniformément vers $\widehat{f}$, mais du caractère Cauchy dans L^2 de la même suite (f_n) résulte que $(\widehat{f_n})$ est de Cauchy dans L^2 d'après (3). La limite de $(\widehat{f_n})$ dans L^2 ne peut être que $\widehat{f}$. Il en résulte que

$$\|\widehat{f}\|_2^2 = \lim_n \|\widehat{f_n}\|_2^2 = \lim_n (2\pi)^d \|f_n\|_2^2 = (2\pi)^d \|f\|_2^2.$$

C'est l'égalité de Parseval.

Fourier dans L^2

Par prolongement par continuité uniforme, on obtient la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ sur L^2. Si $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, on ne peut pas dire que $\mathcal{F}f$ est donnée par l'intégrale de Fourier usuelle, mais on peut toujours dire que $\mathcal{F}f$ est la limite dans L^2 de la suite des fonctions

$$y \to \int_{[-n,n]^d} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x\cdot y}\,\mathrm{d}x.$$

Cette remarque suffit à prouver la plupart des propriétés de $\mathcal{F}$ qui sont des extensions des propriétés de la transformation sur L^1. Par exemple : si $f \in \mathrm{L}^1$ et $g \in \mathrm{L}^2$, on a

$$\mathcal{F}(f * g) = \widehat{f}\,(\mathcal{F}g).$$

Fourier-L^2 et intégrales semi-convergentes

Lemme. *Si $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et s'il existe deux suites a_n, b_n tendant respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$ telles que pour presque tout $y \in \mathrm{E}$ on ait*

$$\varphi(y) = \lim_n \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x,$$

alors $\mathcal{F}f = \varphi$ presque partout dans E.

Preuve. — La suite

$$f_n = \mathbf{1}_{[a_n, b_n]} f$$

tend vers f dans L^2 par convergence dominée, et $f_n \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$, donc les transformées de Fourier $\mathcal{F}f_n$ sont définies par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f_n}(y) = \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x$$

et tendent vers $\mathcal{F}f$ dans L^2. On peut extraire une sous-suite qui tend presque partout vers $\mathcal{F}f$; mais d'après l'hypothèse, cette sous-suite converge aussi simplement vers φ sur E, donc $\varphi = \mathcal{F}f$ sur E.

Corollaire. *Si $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et si l'intégrale*

$$\varphi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x$$

est simplement convergente pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, alors φ est un représentant de $\mathcal{F}f$.

Exemple. La fonction $(\sin x)/x$ est dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, et son intégrale de Fourier est semi-convergente.

Inversion dans L^2

On note σ l'isométrie linéaire définie sur tous les espaces $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le +\infty$, en posant pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et tout x

$$(\sigma f)(x) = f(-x).$$

On a

$$\mathcal{F} \circ \sigma = \sigma \circ \mathcal{F}, \quad \mathcal{F} \circ \mathcal{F} = (2\pi)^d \sigma.$$

On vérifie ces deux formules sur le sous-espace des $f \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$ dont le Fourier est intégrable ; ce sous-espace est dense dans L^2, ce qui permet de prolonger les égalités à L^2 par continuité, puisque $\mathcal{F}$ et σ sont continues de L^2 dans L^2.

Il en résulte que

$$(\mathcal{F})^{-1} = (2\pi)^{-d} \sigma \circ \mathcal{F} = (2\pi)^{-d} \mathcal{F} \circ \sigma.$$