cours 13, le 10 février 2010

Rappel. **Lemme 1.** *Si l'opérateur* A *est un endomorphisme hermitien compact de l'espace de Hilbert* $\mathrm{H} \neq \{0\}$, *alors* $\|\mathrm{A}\|$ *ou* $-\|\mathrm{A}\|$ *est valeur propre de* A.

Lemme. *Si* (x_n) *est une suite dans la boule unité d'un espace de Hilbert* H, *il existe une sous-suite* (x_{n_j}) *et un vecteur* x *de la boule unité tels que*

$$\forall z \in \mathrm{H}, \quad \langle x_{n_j}, z\rangle \to \langle x, z\rangle.$$

On dit qu'une suite $(y_n) \subset \mathrm{H}$ *converge faiblement* vers un vecteur $y \in \mathrm{H}$ lorsque $\langle y_n, z\rangle \to \langle y, z\rangle$ pour tout $z \in \mathrm{H}$, et on dit que y est la *limite faible* de la suite. Le lemme dit donc que toute suite bornée $(x_n) \subset \mathrm{H}$ admet des sous-suites (x_{n_j}) *faiblement convergentes*. Noter que par Banach-Steinhaus, toute suite faiblement convergente est bornée (la suite des valeurs des applications linéaires $\ell_n(z) = \langle z, y_n\rangle$ est bornée en tout point z de l'espace normé complet H).

Preuve. — Le résultat est clair par Bolzano-Weierstrass dans le cas où la suite (x_n) est contenue dans un sous-espace vectoriel de dimension finie. Dans le cas contraire, on peut trouver (par exemple en utilisant le procédé de Gram-Schmidt) une base hilbertienne $(e_k)_{k\geqslant 0}$ de l'espace vectoriel fermé F engendré par les vecteurs (x_n) ; pour chaque entier $k \geq 0$, on peut extraire de la suite bornée de scalaires $(\langle x_n, e_k\rangle)_n$ une sous-suite convergente, et on peut trouver une sous-suite diagonale (n_j) telle que

$$\langle x_{n_j}, e_k\rangle \to a_k \in \mathbb{K}$$

pour tout $k \geq 0$; pour tout entier K et tout j on a

$$\sum_{k=0}^{\mathrm{K}} |\langle x_{n_j}, e_k\rangle|^2 \leq \|x_{n_j}\|^2 \leq 1,$$

donc à la limite $\sum_{k=0}^{\mathrm{K}} |a_k|^2 \leq 1$; comme K est quelconque, on voit que $\sum_{k\geqslant 0} |a_k|^2 \leq 1$ et on peut introduire le vecteur x de la boule unité $\mathrm{B_F}$ de F défini par

$$x = \sum_{k\geqslant 0} a_k e_k \in \mathrm{B_F} \subset \mathrm{B_H}.$$

Si $v \in \mathrm{F}$ est fixé on peut le décomposer dans la base hilbertienne $(e_k)_{k\geqslant 0}$ et écrire

$$v = \sum_{k\geqslant 0} u_k e_k.$$

On va montrer par un découpage simple que $\langle x_{n_j}, v\rangle \to \langle x, v\rangle$. En effet, on approche v par $v_{\mathrm{K}} = \sum_{k=0}^{\mathrm{K}} u_k e_k$, de sorte que

$$\|v - v_{\mathrm{K}}\|^2 = \sum_{k>\mathrm{K}} |u_k|^2 < \varepsilon^2/9.$$

Les produits scalaires avec le vecteur v_{K} sont des sommes finies,

$$\langle x_{n_j}, v_{\mathrm{K}} \rangle = \sum_{k=0}^{\mathrm{K}} \langle x_{n_j}, e_k \rangle \, \overline{u}_k$$

donc la convergence coordonnée par coordonnée entraîne que $\langle x_{n_j}, v_{\mathrm{K}} \rangle \to \langle x, v_{\mathrm{K}} \rangle$ quand j tend vers l'infini, avec, disons, une différence bornée par $\varepsilon/3$ quand $j > \mathrm{J}$. Ensuite,

$$\bigl|\langle x_{n_j}, v_{\mathrm{K}} \rangle - \langle x_{n_j}, v \rangle\bigr| \le \|v_{\mathrm{K}} - v\| < \varepsilon/3, \qquad \bigl|\langle x, v_{\mathrm{K}} \rangle - \langle x, v \rangle\bigr| < \varepsilon/3,$$

et il en résulte que pour tout $\varepsilon > 0$, on a trouvé J assez grand pour que

$$j > \mathrm{J} \;\Rightarrow\; \bigl|\langle x_{n_j}, v \rangle - \langle x, v \rangle\bigr| < \varepsilon.$$

Si z est quelconque dans H on le décompose par projection orthogonale en $z = v + w$, avec $v \in \mathrm{F}$ et $w \perp \mathrm{F}$. On a alors

$$\langle x_{n_j}, z \rangle = \langle x_{n_j}, v \rangle \to \langle x, v \rangle = \langle x, z \rangle.$$

Adjoint hilbertien

On introduit ainsi l'adjoint hilbertien T^* d'un opérateur linéaire continu $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)$ entre deux espaces de Hilbert H_1 et H_2 : pour tout $y \in \mathrm{H}_2$, l'application $x \in \mathrm{H}_1 \to \langle \mathrm{T}x, y \rangle$ est une forme linéaire continue sur H_1, donc représentable par le produit scalaire avec un vecteur de H_1 qu'on appelle T^*y ; on a donc

$$\forall x \in \mathrm{H}_1,\ \forall y \in \mathrm{H}_2, \quad \langle \mathrm{T}x, y \rangle = \langle x, \mathrm{T}^*y \rangle.$$

Il est clair que T^* est linéaire de H_2 dans H_1, et continue avec $\|\mathrm{T}^*\| = \|\mathrm{T}\|$, car

$$\begin{aligned} \|\mathrm{T}^*\| &= \sup_{y \in \mathrm{B}(\mathrm{H}_2)} \|\mathrm{T}^*y\| = \sup_{y \in \mathrm{B}(\mathrm{H}_2)} \sup_{x \in \mathrm{B}(\mathrm{H}_1)} |\langle \mathrm{T}^*y, x \rangle| \\ &= \sup_{x \in \mathrm{B}(\mathrm{H}_1)} \sup_{y \in \mathrm{B}(\mathrm{H}_2)} |\langle \mathrm{T}x, y \rangle| = \sup_{x \in \mathrm{B}(\mathrm{H}_1)} \|\mathrm{T}x\| = \|\mathrm{T}\|. \end{aligned}$$

Les classes d'opérateurs : hermitien, normal, unitaire, isométrie peuvent se définir à partir de cette notion d'adjoint. Un opérateur *hermitien* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$) est défini par $\mathrm{T}^* = \mathrm{T}$, mais il est commode pour la suite de noter que T est hermitien si et seulement si

$$\forall x, y \in \mathrm{H}, \quad \langle \mathrm{T}x, y \rangle = \langle x, \mathrm{T}y \rangle,$$

ce qui rend évident le fait que la restriction d'un hermitien à un sous-espace stable reste hermitienne. L'opérateur $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ est *normal* si $\mathrm{T}^*\mathrm{T} = \mathrm{T}\mathrm{T}^*$, *unitaire* si T^* est l'inverse de T, soit $\mathrm{T}^*\mathrm{T} = \mathrm{T}\mathrm{T}^* = \mathrm{Id}_{\mathrm{H}}$, ce qui montre que les unitaires sont normaux.

En dimension infinie la relation $\mathrm{T}^*\mathrm{T} = \mathrm{Id}$ ne suffit pas à caractériser les unitaires : elle caractérise les *isométries*, y compris dans le cas où T opère d'un espace de Hilbert H_1 dans un autre H_2 ; en effet, si $\mathrm{T}^*\mathrm{T} = \mathrm{Id}$,

$$\forall x \in \mathrm{H}_1, \quad \|\mathrm{T}x\|^2 = \langle \mathrm{T}x, \mathrm{T}x \rangle = \langle \mathrm{T}^*\mathrm{T}x, x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2.$$

Le procédé de polarisation permet de montrer que réciproquement, les isométries T vérifient $\mathrm{T}^*\mathrm{T} = \mathrm{Id}$.

Un exemple simple et classique d'isométrie est celui du *décalage* (à droite) ou *shift* S, qui est défini sur $\ell^2(\mathbb{N})$ par

$$(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \to (0, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, \ldots).$$

L'adjoint S^* est le décalage à gauche, on vérifie que le produit $\mathrm{S}^*\mathrm{S}$ est l'identité mais $\mathrm{S}\mathrm{S}^*$ est le projecteur orthogonal

$$(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \to (0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots).$$

Lemme. *L'image par* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)$ *de la boule unité fermée de l'espace de Hilbert* H_1 *est fermée dans l'espace de Hilbert* H_2.

Preuve. — Supposons que $(x_n) \subset \mathrm{B}_{\mathrm{H}_1}$ et que $\mathrm{T}x_n$ tende vers $y \in \mathrm{H}_2$; on peut trouver une sous-suite (x_{n_j}) qui vérifie le résultat du lemme précédent, avec une limite faible x qui est un vecteur de la boule unité de H_1. Si $z \in \mathrm{H}_2$ est fixé, on écrit

$$\langle \mathrm{T}x_{n_j}, z\rangle = \langle x_{n_j}, \mathrm{T}^* z\rangle \to \langle x, \mathrm{T}^* z\rangle = \langle \mathrm{T}x, z\rangle.$$

Mais comme $\mathrm{T}x_n$ tend en norme vers y, on a aussi

$$\lim_j \langle \mathrm{T}x_{n_j}, z\rangle = \langle y, z\rangle.$$

Il en résulte que $\langle \mathrm{T}x - y, z\rangle = 0$ pour tout z. Il s'agit pour finir de voir que $y = \mathrm{T}x$; il suffit de poser $z = \mathrm{T}x - y$ pour obtenir ce résultat, qui montre que tout point y adhérent à l'image de la boule unité est en fait dans l'image de cette boule.

Remarque. Une preuve plus sophistiquée procède ainsi : la boule unité fermée B du Hilbert H_1 est faiblement compacte, l'application linéaire continue T est aussi faiblement continue, l'espace d'arrivée est faiblement séparé, donc l'image de la boule est faiblement compacte, donc faiblement fermée, donc fermée.

Cette preuve fonctionne aussi quand l'espace d'arrivée est un espace normé F quelconque : le fait que la topologie faible de F soit séparée résulte du théorème de Hahn-Banach. La propriété de compacité faible de la boule unité de l'espace de départ E caractérise les *espaces réflexifs* : l'espace normé E est réflexif si toute forme linéaire continue ℓ sur son dual topologique E' *provient* d'un vecteur x de E, au sens que

$$\forall x' \in \mathrm{E}', \quad \ell(x') = x'(x).$$

Cela revient à dire que *l'injection canonique*

$$x \in \mathrm{E} \quad \to \quad \bigl\{x' \in \mathrm{E}' \ \to \ x'(x)\bigr\}$$

de E dans son bidual topologique E'' est surjective. Exercice : vérifier que les espaces de Hilbert sont réflexifs.

Suite de la diagonalisation des hermitiens compacts

Théorème. *Si* A *est un endomorphisme hermitien compact d'un espace de Hilbert* H*, il existe une base hilbertienne de* H *dont tous les éléments sont des vecteurs propres de* A*. Les valeurs propres sont réelles, et pour chaque* $\delta > 0$*, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs propres, comptées avec leur ordre de multiplicité, dont la valeur absolue dépasse* δ.

Preuve. — On suppose H de dimension infinie, sinon c'est trop facile. On pose $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}$, qui admet d'après le lemme 1 un vecteur propre e_0, qu'on choisit de norme un (puisqu'on veut construire une base hilbertienne), correspondant à la valeur propre $\pm\|\mathrm{A}\|$,

$$\mathrm{A}e_0 = \pm\|\mathrm{A}\|\, e_0.$$

On note que l'orthogonal $\mathrm{W} = \mathrm{V}^\perp$ d'un sous-espace V stable par A est stable aussi,

$$\forall w \perp \mathrm{V},\ \forall v \in \mathrm{V}, \quad \langle \mathrm{A}w, v\rangle = \langle w, \mathrm{A}v\rangle = 0.$$

L'orthogonal H_1 de $V_0 = \mathrm{Vect}(e_0)$ est donc stable, et on désigne par $A_1 \in \mathcal{L}(H_1)$ la restriction de A à H_1.

Si les vecteurs propres $e_0, \ldots, e_n$ ont déjà été trouvés, on pose $V_n = \mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_n)$; ce sous-espace vectoriel est stable par A, donc son orthogonal $H_{n+1} = V_n^\perp$ aussi, la restriction de A à H_{n+1} est notée A_{n+1} ; on vérifie que A_{n+1} est hermitien, et compact (parce que l'image de la boule unité de H_{n+1} par A_{n+1} est contenue dans l'image par A de la boule unité de H). L'espace de dimension finie V_n est fermé et distinct de H, donc son orthogonal H_{n+1} n'est pas réduit à zéro et il existe d'après le lemme 1 un vecteur propre $e_{n+1} \in H_{n+1}$ pour A_{n+1}, qu'on choisit de norme 1, tel que

$$\mathrm{A}e_{n+1} = \pm\|\mathrm{A}_{n+1}\|\, e_{n+1}.$$

Par construction, le vecteur e_{n+1} est orthogonal aux précédents $e_0, \ldots, e_n$.

La suite $\|A_n\|$ est décroissante, elle tend vers 0, sinon on contredit la compacité de A : si on pose $\rho = \lim_n \|A_n\|$, les valeurs propres (λ_n) successives, qui sont réelles de valeur absolue égale à $\|A_n\|$, ont une valeur absolue $\geq \rho$. On a donc pour $m \neq n$

$$\|\mathrm{A}e_m - \mathrm{A}e_n\|^2 = \|\lambda_m e_m - \lambda_n e_n\|^2 = \lambda_m^2 + \lambda_n^2 \geq 2\rho^2.$$

Comme tous les points $(\mathrm{A}e_n)$ sont dans le compact $\mathrm{A}(\mathrm{B_H})$ image de la boule unité, il n'est pas possible que leurs distances mutuelles soient minorées par un nombre > 0. On a donc

$$\lim_n \|\mathrm{A}_n\| = \rho = 0.$$

L'espace fermé V_∞ engendré par la suite orthonormée $(e_n)_{n\geqslant 0}$ est stable par A, et A est nul sur l'orthogonal H_∞ ; en effet, les vecteurs y de H_∞ sont dans tous les H_n, donc

$$y \in \mathrm{H}_\infty \ \Rightarrow\ \|\mathrm{A}y\| = \|\mathrm{A}_n y\| \leq \|\mathrm{A}_n\|\, \|y\|$$

pour tout n, ce qui implique $\mathrm{A}y = 0$. On complète éventuellement, dans le cas où $H \neq V_\infty$, la suite orthonormée (e_n) par une base hilbertienne de H_∞, formée de vecteurs du noyau de A. On obtient finalement une base hilbertienne de H, formée de vecteurs propres de A. Les valeurs propres non nulles successives sont les valeurs $\pm\|A_n\|$, qui sont réelles et tendent vers 0, ce qui montre la deuxième partie de l'énoncé.

Remarque. Si T est normal et compact, et si le corps de base est $\mathbb{C}$, il existe une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T. On peut raisonner ainsi : l'opérateur $\mathrm{A} = \mathrm{T}^*\mathrm{T}$ est hermitien et compact, donc on peut le diagonaliser. Les espaces propres H_μ de A, pour $\mu \neq 0$, sont de dimension finie et stables par T, qui commute avec A. Puisque le corps de base est $\mathbb{C}$, on peut diagonaliser dans une base orthonormée la restriction de T à chaque espace H_μ (on sait que les sous-espaces propres d'un opérateur normal sont deux à deux orthogonaux) ; la restriction de T à H_μ admet des valeurs propres $\lambda \in \mathbb{C}$ telles que $|\lambda|^2 = \mu$. De plus, T et A ont le même noyau, ce qui prend en compte la valeur propre 0 éventuelle. Si le corps de base est $\mathbb{R}$, le résultat est faux, comme on le voit avec les rotations de $\mathbb{R}^2$.

Opérateurs intégraux de Hilbert-Schmidt

Étant donné un « noyau » $\mathrm{K}(x, y)$, fonction complexe de deux variables, où K est dans $\mathrm{L}^2([0,1]^2)$, on pose pour toute $f \in \mathrm{L}^2([0,1])$ et presque tout $x \in [0,1]$ (justifications à suivre)

$$(\mathrm{T_K} f)(x) = \int_0^1 \mathrm{K}(x, y) f(y) \, \mathrm{d}y.$$

On va voir qu'on définit ainsi une application linéaire $\mathrm{T_K}$ continue (un opérateur) sur $\mathrm{L}^2([0,1])$. Puisque

$$\int_0^1 \Bigl(\int_0^1 |\mathrm{K}(x, y)|^2 \, \mathrm{d}y \Bigr) \, \mathrm{d}x < +\infty,$$

l'ensemble

$$\mathrm{N} = \Bigl\{ x : \int_0^1 |\mathrm{K}(x, y)|^2 \, \mathrm{d}y = +\infty \Bigr\}$$

est de mesure nulle. Pour $x \notin \mathrm{N}$ on a $\int_0^1 |\mathrm{K}(x, y)|^2 \, \mathrm{d}y < \infty$ (c'est donc vrai pour presque tout x) et on peut écrire

$$(\mathrm{T_K} f)(x) = \langle f, k_x \rangle,$$

où $k_x \in \mathrm{L}^2([0,1])$ est défini par

$$k_x(y) = \overline{\mathrm{K}(x, y)}.$$

On a la majoration

$$|(\mathrm{T_K} f)(x)|^2 \le \|f\|^2 \, \|k_x\|^2$$

qui permet d'obtenir avec Fubini

$$\int_0^1 |(\mathrm{T_K} f)(x)|^2 \, \mathrm{d}x \le \|f\|^2 \iint |\mathrm{K}(x, y)|^2 \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y,$$

donc $\mathrm{T_K}$ est borné et sa norme est majorée par celle de K dans $\mathrm{L}^2([0,1]^2)$. On constate aussi que l'application $\mathrm{K} \to \mathrm{T_K}$ est linéaire continue de $\mathrm{L}^2([0,1]^2)$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{L}^2([0,1]))$.

L'opérateur $\mathrm{T_K}$ est compact : si (f_n) est une suite dans la boule unité de $\mathrm{L}^2([0,1])$, on peut trouver une sous-suite (f_{n_j}) qui tend faiblement vers une fonction $f \in \mathrm{L}^2([0,1])$. Alors pour $x \notin \mathrm{N}$

$$(\mathrm{T_K} f_{n_j})(x) = \langle f_{n_j}, k_x \rangle \to \langle f, k_x \rangle = (\mathrm{T_K} f)(x),$$

donc la suite des fonctions intégrables $x \to |(\mathrm{T_K} f_{n_j})(x) - (\mathrm{T_K} f)(x)|^2$ converge simplement vers 0, avec domination par la fonction intégrable $x \to 4 \|k_x\|^2$. Il en résulte que

$$\|\mathrm{T_K} f_{n_j} - \mathrm{T_K} f\|_2^2 = \int_0^1 |(\mathrm{T_K} f_{n_j})(x) - (\mathrm{T_K} f)(x)|^2 \, \mathrm{d}x \to 0\,;$$

ainsi toute suite $(\mathrm{T_K} f_n)$ dans l'image de la boule unité admet des sous-suites convergentes en norme, donc l'image de la boule est compacte et l'opérateur $\mathrm{T_K}$ est compact.

Exemple. Sur $[0,1]^2$ on considère

$$K(x,y) = \min(x,y).$$

Le noyau est réel symétrique, ce qui entraîne que T_K est hermitien (utiliser Fubini). Pour toute $f \in L^2([0,1])$,

$$F(x) = (T_K f)(x) = \int_0^x y f(y)\,dy + x \int_x^1 f(y)\,dy.$$

Comme T_K est hermitien et compact, on peut trouver une base hilbertienne de vecteurs propres. La recherche de ces vecteurs propres conduit à une équation différentielle ; en effet, quand f est continue, on voit que $F = T_K f$ est dérivable, et

$$F'(x) = x f(x) - x f(x) + \int_x^1 f(y)\,dy = \int_x^1 f(y)\,dy,$$

qui est à nouveau dérivable et donne $F'' = -f$. Si φ est C^2 à support compact dans l'ouvert $]0,1[$, les fonctions $T_K(-\varphi'')$ et φ ont la même dérivée seconde, donc la différence $d(x) = \varphi(x) - T_K(-\varphi'')(x)$ est affine ; mais on vérifie que $d(0) = d'(1) = 0$, qui entraîne $d = 0$. Il en résulte que $T_K(-\varphi'') = \varphi$; l'image de T_K est donc dense dans $L^2([0,1])$, puisqu'elle contient toutes les fonctions C^2 à support compact dans $]0,1[$. Comme T_K est hermitien, il en résulte que T_K est injectif (si $T_K x = 0$, alors $0 = \langle T_K x, y\rangle = \langle x, T_K y\rangle$ montre que x est orthogonal à l'image de T_K, donc $x = 0$ ici), et par conséquent les valeurs propres sont non nulles. Si $T_K f = \lambda f$, avec f non nulle, λ est réel non nul et on peut écrire $f = (T_K f)/\lambda$ qui est continue. On en déduit

$$\lambda f'' = -f,$$

qui admet des solutions $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x$ si $\lambda < 0$, ou $a \cos x + b \sin x$ si $\lambda > 0$. On résout grâce aux conditions au bord : on voit que $(T_K f)(0) = (T_K f)'(1) = 0$, donc $f(0) = f'(1) = 0$. Les solutions sont à chercher du côté sin ou bien sh, à cause de $f(0) = 0$, mais $f'(1) = 0$ exclut les sh et impose, si $f(x) = \sin(\omega x)$, $\omega > 0$, que

$$\lambda = 1/\omega^2, \quad \cos(\omega) = 0,$$

ce qui fournit une liste des valeurs ω_k possibles et en conséquence une liste des valeurs propres λ_k de T_K. On obtient

$$\omega_k = \pi/2 + k\pi, \quad \lambda_k = \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}, \quad f_k(x) = \sqrt{2}\sin(\omega_k x), \qquad k = 0, 1, \dots$$

On peut en déduire que

$$\min(x,y) = K(x,y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k f_k(x) f_k(y) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(\pi x/2 + k\pi x)\sin(\pi y/2 + k\pi y)}{(2k+1)^2}.$$

Le point de vue des matrices infinies : bases de $\mathrm{L}^2(\mathrm{X} \times \mathrm{Y})$

Lemme. *Si* $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ *est un espace mesuré, avec* μ *mesure finie, et* $\mathbf{B}$ *une algèbre de fonctions réelles bornées sur* X *contenant les constantes, la classe*

$$\mathcal{F}_{\mathbf{B}} = \{\mathrm{A} \in \mathcal{A} : \exists (\varphi_n) \subset \mathbf{B}, \ \ \lim_n \int_{\mathrm{X}} |\mathbf{1}_{\mathrm{A}} - \varphi_n|^2 \, \mathrm{d}\mu = 0, \ \ 0 \leq \varphi_n \leq 1\}$$

est une tribu.

Preuve. — On obtient que $\mathrm{X} \in \mathcal{F}_{\mathbf{B}}$ en considérant la suite constante $\varphi_n = \mathbf{1}$. Si la suite $(\varphi_n) \subset \mathbf{B}$ tend vers $\mathbf{1}_{\mathrm{A}}$ en norme L^2, alors $(\mathbf{1} - \varphi_n)$ tend vers $\mathbf{1}_{\mathrm{A}^c}$; si ψ_n tend vers $\mathbf{1}_{\mathrm{B}}$, alors les produits $\varphi_n \psi_n \in \mathbf{B}$ tendent vers $\mathbf{1}_{\mathrm{A}} \mathbf{1}_{\mathrm{B}} = \mathbf{1}_{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}}$ en norme L^2, comme on le voit en écrivant

$$\varphi_n \psi_n - \mathbf{1}_{\mathrm{A}} \mathbf{1}_{\mathrm{B}} = (\varphi_n - \mathbf{1}_{\mathrm{A}}) \psi_n + \mathbf{1}_{\mathrm{A}} (\psi_n - \mathbf{1}_{\mathrm{B}}),$$

et en utilisant l'hypothèse (ψ_n) bornée par 1, qui implique que

$$\|\varphi_n \psi_n - \mathbf{1}_{\mathrm{A}} \mathbf{1}_{\mathrm{B}}\|_2 \leq \|\varphi_n - \mathbf{1}_{\mathrm{A}}\|_2 + \|\psi_n - \mathbf{1}_{\mathrm{B}}\|_2$$

tend vers 0. Enfin, le passage à la réunion croissante A d'une suite d'ensembles (A_n) est clair, car $(\mathbf{1}_{\mathrm{A}_n})$ tend vers $\mathbf{1}_{\mathrm{A}}$ dans L^2 par convergence dominée.

Remarque. Comme les fonctions sous l'intégrale sont bornées, on obtiendrait la même classe $\mathcal{F}_{\mathbf{B}}$ en employant la convergence L^p, $1 \leq p < +\infty$, ou la convergence presque partout (par convergence dominée), à la place de la convergence L^2 qui a été préférée dans notre contexte hilbertien.

Proposition. *Si* (f_i) *et* (g_j) *sont des bases hilbertiennes de* $\mathrm{L}^2(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ *et* $\mathrm{L}^2(\mathrm{Y}, \mathcal{B}, \nu)$*, où* μ *et* ν *sont* σ*-finies, alors les fonctions* $f_i \otimes g_j$ *définies par*

$$(f_i \otimes g_j)(x, y) = f_i(x) g_j(y)$$

forment une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$.

Preuve. — Il est facile de vérifier que les fonctions $f_i \otimes g_j$ sont orthonormées ; il faut montrer qu'elles engendrent un sous-espace dense.

Par les définitions de la théorie de l'intégration, les fonctions $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-étagées de carré intégrable (c'est-à-dire intégrables) sont denses dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{X} \times \mathrm{Y})$. Il suffit donc d'approcher les indicatrices $\mathbf{1}_{\mathrm{C}}$, où $\mathrm{C} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ est de mesure finie, par des combinaisons linéaires des $f_i \otimes g_j$. Comme les mesures sont σ-finies, on peut supposer que C est contenu dans un pavé $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ de mesure finie.

Fixons un pavé $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ de mesure finie, et considérons l'algèbre $\mathbf{B}$ de fonctions sur $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ qui sont des fonctions étagées de la forme

$$\varphi(x, y) = \sum c_{j,k} \mathbf{1}_{\mathrm{A}_j}(x) \mathbf{1}_{\mathrm{B}_k}(y)$$

où $\mathrm{A}_j \subset \mathrm{A}$, $\mathrm{B}_k \subset \mathrm{B}$, $\mathrm{A}_j \in \mathcal{A}$, $\mathrm{B}_k \in \mathcal{B}$. Par le lemme précédent appliqué à la mesure finie

$$\xi = \mathbf{1}_{\mathrm{A} \times \mathrm{B}} \, \mu \otimes \nu,$$

l'ensemble des limites en norme L^2 des fonctions $\varphi \in \mathbf{B}$ telles que

$$0 \leq \varphi \leq \mathbf{1}_{\mathrm{A} \times \mathrm{B}}$$

contient les indicatrices des ensembles d'une tribu $\mathcal{F}$ de parties de $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$, et cette tribu contient évidemment les produits $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{B}_1$, $\mathrm{A}_1 \in \mathcal{A}$, $\mathrm{B}_1 \in \mathcal{B}$, donc $\mathcal{F}$ contient tous les ensembles C de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ contenus dans $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$. Il suffit maintenant d'approcher les indicatrices des produits $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{B}_1$ par des combinaisons linéaires des $f_i \otimes g_j$.

Comme (f_i) est une base hilbertienne, on peut approcher $\mathbf{1}_\mathrm{A} \in \mathrm{L}^2(\mathrm{X})$ par une combinaison linéaire des f_i,

$$\|\mathbf{1}_\mathrm{A} - \sum_i a_i f_i\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{X})} < \varepsilon,$$

et de même

$$\|\mathbf{1}_\mathrm{B} - \sum_j b_j g_j\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{Y})} < \varepsilon.$$

On montre pour finir que

$$\|\mathbf{1}_\mathrm{A} \otimes \mathbf{1}_\mathrm{B} - \sum_{i,j} a_i b_j f_i \otimes g_j\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{X}\times\mathrm{Y})}$$

est petit. À cette fin, on utilise à nouveau

$$\Bigl(\mathbf{1}_\mathrm{A}(x) - \sum_i a_i f_i(x)\Bigr)\mathbf{1}_\mathrm{B}(y) + \Bigl(\sum_i a_i f_i(x)\Bigr)\Bigl(\mathbf{1}_\mathrm{B}(y) - \sum_j b_j g_j(y)\Bigr),$$

le théorème de Fubini et le fait que $\| \sum_i a_i f_i\|_2 \le \|\mathbf{1}_\mathrm{A}\|_2 + \varepsilon$. On obtient ainsi

$$\|\mathbf{1}_\mathrm{A} \otimes \mathbf{1}_\mathrm{B} - \sum_{i,j} a_i b_j f_i \otimes g_j\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{X}\times\mathrm{Y})} \le \varepsilon\|\mathbf{1}_\mathrm{B}\|_2 + \bigl(\|\mathbf{1}_\mathrm{A}\|_2 + \varepsilon\bigr)\varepsilon.$$

Le point de vue des matrices infinies : suite

Revenons aux noyaux. On décompose $\mathrm{K} \in \mathrm{L}^2(\mathrm{X} \times \mathrm{Y})$ dans la base hilbertienne $f_i \otimes \overline{g}_j$,

$$\mathrm{K} = \sum_{i,j} c_{i,j} f_i \otimes \overline{g}_j,$$

série convergente (famille sommable plutôt) dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{X}\times\mathrm{Y})$; la continuité de l'application linéaire $\mathrm{K} \to \mathrm{T_K}$ montre que

$$\mathrm{T_K} = \sum_{i,j} c_{i,j} \mathrm{T}_{f_i \otimes \overline{g}_j}$$

est une série convergente dans $\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathrm{Y}), \mathrm{L}^2(\mathrm{X}))$. En posant $\mathrm{T}_{i,j} = \mathrm{T}_{f_i \otimes \overline{g}_j}$ on voit que

$$(\mathrm{T}_{i,j}\, g_{j_0})(x) = \int_\mathrm{Y} f_i(x)\overline{g_j(y)}\, g_{j_0}(y)\,\mathrm{d}\nu(y) = \delta_{j,j_0}\, f_i(x)\,;$$

comme l'application $\mathrm{T} \to \langle \mathrm{T}g, f\rangle$ est linéaire continue sur $\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathrm{Y}), \mathrm{L}^2(\mathrm{X}))$ pour tous g, f fixés, la convergence de la série d'opérateurs implique

$$\langle \mathrm{T_K} g_{j_0}, f_{i_0}\rangle = \sum_{i,j} c_{i,j} \langle \mathrm{T}_{i,j}\, g_{j_0}, f_{i_0}\rangle = c_{i_0,j_0}.$$

On a donc
$$\mathrm{T}_{\mathrm{K}} g_{j_0} = \sum_i c_{i,j_0} f_i.$$
Les coefficients $(c_{i,j})$ apparaissent donc comme la *matrice infinie* de l'application linéaire T_{K} par rapport aux bases hilbertiennes (g_j) et (f_i) : on a pris l'image d'un vecteur g_j de la base de l'espace de départ et on l'a décomposé dans la base d'arrivée (f_i). On en déduit
$$\sum_j \|\mathrm{T}_{\mathrm{K}} g_j\|^2 = \sum_{i,j} |c_{i,j}|^2 = \|\mathrm{K}\|_2^2.$$
On a ainsi retrouvé la norme de Hilbert-Schmidt, qui est définie pour un opérateur T quelconque de H_1 dans H_2 par
$$\|\mathrm{T}\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_j \|\mathrm{T} g_j\|^2,$$
quantité dont on montre, en général, qu'elle ne dépend pas de la base hilbertienne (g_j) choisie pour H_1 ; c'est bien clair ici, puisqu'on a égalé cette norme à la norme $\mathrm{L}^2([0,1]^2)$ du noyau, clairement indépendante du choix de la base.

Suites de fonctions holomorphes

Proposition : théorème de Morera. *Les conditions suivantes sont équivalentes pour une fonction f définie dans un ouvert Ω du plan complexe, à valeurs complexes :*

– *la fonction f est analytique dans Ω ;*
– *pour tout triangle $\mathrm{T} = \mathrm{co}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) \subset \Omega$ on a $\int_{\partial \mathrm{T}} f(z)\, dz = 0$;*
– *la fonction f est dans $\mathrm{H}(\Omega)$.*

Preuve. — Si f est analytique elle est dans $\mathrm{H}(\Omega)$; si elle est dans $\mathrm{H}(\Omega)$ les intégrales sur les bords de triangles solides sont nulles (Goursat) ; si ces intégrales sont nulles, alors f admet une primitive F_{D} dans tout disque ouvert D contenu dans Ω : alors F_{D} est dans $\mathrm{H}_c(\mathrm{D})$, donc analytique dans D, et sa dérivée f est analytique dans D, pour tout $\mathrm{D} \subset \Omega$, donc f est analytique dans Ω.

Corollaire : convergence des suites (un théorème de Weierstrass). *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$; si $(f_n) \subset \mathrm{H}(\Omega)$ converge simplement vers f et si la suite (f_n) est localement bornée, alors la limite est holomorphe. En particulier, la convergence uniforme des (f_n) vers f sur tout compact de Ω implique l'holomorphie de f.*

En fait, la première hypothèse implique que pour tout $k \geq 0$, la suite des dérivées $(f_n^{(k)})$ converge vers $f^{(k)}$ uniformément sur tout compact de Ω.

Notons une fois pour toutes qu'une hypothèse de majoration locale implique une majoration sur tout compact $\mathrm{K} \subset \Omega$: pour tout x de K, il existe un ouvert U_x contenant x et une borne locale M_x ; on peut recouvrir K par un nombre fini de ces ouverts et prendre la borne $\mathrm{M} = \max(\mathrm{M}_{x_1}, \ldots, \mathrm{M}_{x_n})$. Plusieurs autres hypothèses locales se recollent de la même façon, par exemple la convergence uniforme locale.

Preuve. — Pour montrer l'holomorphie de la limite, on passe à la limite dans l'intégrale sur le bord d'un triangle solide $\mathrm{T} = \mathrm{co}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$ contenu dans Ω ; la compacité et la majoration locale donnent un chapeau constant, intégrable sur le compact. Détaillons l'application de Lebesgue dominée pour une intégrale sur un segment $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$ de $\mathbb{C}$,
$$\int_{[\mathrm{A},\mathrm{B}]} f(z)\, \mathrm{d}z.$$

Si on utilise le chemin $\gamma(t) = (1-t)\mathrm{A} + t\mathrm{B}$, $t \in [0,1]$, on voit que l'intégrale curviligne se ramène à l'intégrale de Lebesgue

$$\int_0^1 f((1-t)\mathrm{A} + t\mathrm{B})(\mathrm{B}-\mathrm{A})\,\mathrm{d}t.$$

Si on applique ce calcul à une suite (f_n) localement bornée, on remarque que (f_n) sera bornée par un certain M sur le compact $\mathrm{K} = [\mathrm{A},\mathrm{B}] \subset \Omega$, et on appliquera Lebesgue à la suite de fonctions

$$t \in [0,1] \ \rightarrow \ h_n(t) = f_n((1-t)\mathrm{A} + t\mathrm{B})(\mathrm{B}-\mathrm{A}),$$

qui tend simplement vers

$$h(t) = f((1-t)\mathrm{A} + t\mathrm{B})(\mathrm{B}-\mathrm{A})$$

et admet la majoration

$$|h_n(t)| \le \mathrm{M}|\mathrm{B}-\mathrm{A}|\,;$$

le majorant est une fonction constante, qui est intégrable sur $[0,1]$. On en déduit par Lebesgue dominé que

$$\int_{[\mathrm{A},\mathrm{B}]} f_n(z)\,dz \rightarrow \int_{[\mathrm{A},\mathrm{B}]} f(z)\,dz$$

et en additionnant les trois côtés du triangle $\mathrm{T} = \mathrm{co}(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C})$,

$$0 = \int_{\partial\mathrm{T}} f_n(z)\,dz \rightarrow \int_{\partial\mathrm{T}} f(z)\,dz,$$

donc l'intégrale de f sur tout bord de triangle solide T contenu dans Ω est nulle et f est holomorphe par le théorème de Morera.

L'holomorphie acquise, on montre la convergence uniforme locale (qui implique uniforme sur tout compact) en passant à la limite dans la dérivée $k$ième de l'intégrale de Cauchy. Pour tout point $z_0 \in \Omega$, soit r_0 la distance au bord et $\mathrm{D}(z_0) \subset \Omega$ le disque ouvert de rayon $r_0/3$ de centre z_0. On écrit la formule de Cauchy sur le cercle γ_0 de centre z_0 et de rayon $2r_0/3$, on dérive k fois, on considère pour $|z - z_0| \le r_0/3$

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\,\mathrm{i}\,\pi} \int_{\gamma_0} \frac{f_n(w)}{(w-z)^{k+1}}\,dw\,;$$

pour chaque n on choisit z_n dans $\overline{\mathrm{D}(z_0)}$ qui maximise le module de $f_n^{(k)} - f^{(k)}$ dans $\overline{\mathrm{D}(z_0)}$; si la convergence uniforme sur $\overline{\mathrm{D}(z_0)}$ n'est pas vraie, on peut passer à une sous-suite (n_j) telle que $z_{n_j} \rightarrow z^* \in \overline{\mathrm{D}(z_0)}$ et telle que

$$(*) \qquad \max\bigl\{\bigl|(f_{n_j}^{(k)} - f^{(k)})(z)\bigr| : z \in \overline{\mathrm{D}(z_0)}\bigr\} = \bigl|(f_{n_j}^{(k)} - f^{(k)})(z_{n_j})\bigr| \ge \delta > 0.$$

On atteindra une contradiction en appliquant Lebesgue dominé. En effet, la suite des fonctions

$$w \in \gamma_0^* \ \rightarrow \ h_j(w) = \frac{f_{n_j}(w) - f(w)}{(w - z_{n_j})^{k+1}}$$

est dominée par une constante, qui est intégrable sur l'intervalle compact de paramétrage de γ_0,

$$|h_j(w)| \leq \frac{2\mathrm{M}}{|w - z_{n_j}|^{k+1}} \leq \frac{2\mathrm{M}}{(r_0/3)^{k+1}},$$

et la suite $(h_j(w))$ tend simplement vers

$$w \in \gamma_0^* \ \rightarrow \ \frac{f(w) - f(w)}{(w - z^*)^{k+1}} = 0\,;$$

la convergence vers 0 des intégrales $\int_{\gamma_0} h_j(w)\,\mathrm{d}w$ contredit $(*)$ et termine la preuve.

Théorème de Montel

Théorème. *Si la suite* $(f_n) \subset \mathrm{H}(\Omega)$ *est localement bornée, elle admet des sous-suites qui convergent vers une fonction* $f \in \mathrm{H}(\Omega)$*, uniformément sur tout compact de* Ω*.*

Il y a bel et bien une compacité, si on prend la peine de définir la topologie convenable sur $\mathrm{H}(\Omega)$: c'est la topologie de convergence uniforme sur les compacts $\mathrm{K} \subset \Omega$.

Preuve. — Sur tout disque fermé contenu dans Ω il y a majoration uniforme des $(f_n(z))$. Pour chaque z du compact K_n

$$\mathrm{K}_n = \{z \in \Omega : d(z, \Omega^c) \geq 2^{-n},\ |z| \leq 2^n\}$$

on prend un disque D_z ouvert centré en z tel que le disque fermé F_z de même centre z et de rayon double soit contenu dans Ω ; alors les (f_n) sont bornées par un M_z sur F_z ; pour chaque n, on peut extraire un recouvrement fini du compact K_n par des disques D_{z_i}, donc on peut, en mettant bout à bout ces listes finies, former une liste $(\mathrm{D}_m)_{m\geqslant 0}$ de disques qui couvrent Ω, et dont les doubles (F_m) ont les propriétés ci-dessus. On rappelle la majoration de la constante de Lipschitz : si f_n est borné par M dans le disque double F_m, elle est Lipschitz de constante M/r_m dans D_m, où r_m est le rayon de D_m ; on peut donc appliquer Ascoli localement, sur chaque compact $\overline{\mathrm{D}_m}$; on trouve ensuite une suite diagonale (n_k) telle que

$$\forall m,\ \forall z \in \mathrm{D}_m, \quad \lim_k f_{n_k}(z) \ \text{ existe}\,;$$

en particulier, la suite (f_{n_k}) est localement bornée et simplement convergente : la limite simple est holomorphe, et la convergence est uniforme sur tout compact de Ω.

Remarque. Si les (K_n) sont comme ci-dessus (une suite exhaustive de compacts pour l'ouvert Ω), on peut faire de $\mathrm{H}(\Omega)$ un espace vectoriel métrique (complet) en posant

$$d(f,g) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \min\bigl(1, \sup\{|f(z) - g(z)| : z \in \mathrm{K}_n\}\bigr).$$

La suite (f_n) du théorème de Montel est relativement compacte dans cet espace métrique.