Rappel du résultat avec φ de classe C^1 sur un carré. On a posé $\mathrm{K} = [0,1]^2$.

Proposition 1. *Si $f \in \mathrm{H}(\Omega)$ et si $\varphi : \mathrm{K} \to \Omega$ est de classe C^1, on a*

$$\int_{\varphi^{\mathrm{K}}} f(z)\, dz = 0.$$

Exemple : invariance de l'intégrale sur des cercles concentriques

Posons, pour $s, t \in [0,1]$ et $0 < \rho_1 \le \rho_2$,

$$\varphi(s,t) = \big((1-s)\rho_1 + s\rho_2\big)\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, t}.$$

Cette application φ est de classe C^1 sur le carré. Décodons le lacet φ^{K}, parcours du bord du carré $[0,1]^2$ par l'application φ : on commence par passer de $(s,t) = (0,0)$ à $(1,0)$, ce qui correspond au parcours par

$$\varphi(s,0) = (1-s)\rho_1 + s\rho_2, \quad s \in [0,1]$$

du segment $[\rho_1, \rho_2]$ dans le plan complexe ; ensuite, le côté vertical de $(1,0)$ à $(1,1)$ donne le parcours du cercle de rayon ρ_2 dans le sens direct,

$$\varphi(1,t) = \rho_2\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, t}, \quad t \in [0,1]$$

puis on revient de ρ_2 à ρ_1 sur le segment $[\rho_2, \rho_1]$, s décroissant de 1 à 0 avec t fixé égal à 1, et pour finir on parcourt le cercle de rayon ρ_1 dans le sens rétrograde, t décroissant de 1 à 0 avec s fixé égal à 0.

Si g est holomorphe dans une couronne $\mathrm{C}(r_1, r_2)$ et si $0 \le r_1 < \rho_1 \le \rho_2 < r_2$, la proposition 1 donne par conséquent

$$\int_{\varphi^{\mathrm{K}}} g(z)\, \frac{dz}{z} = \int_{[\rho_1,\rho_2]} g(z)\, \frac{dz}{z} + \int_0^1 g(\rho_2\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, t})\, 2\mathrm{i}\pi\, \mathrm{d}t$$

$$+ \int_{[\rho_2,\rho_1]} g(z)\, \frac{dz}{z} + \int_1^0 g(\rho_1\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, t})\, 2\mathrm{i}\pi\, \mathrm{d}t = 0,$$

ce qui donne en posant $\theta = 2\pi t$

$$\int_0^{2\pi} g(\rho_2\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} g(\rho_1\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\, \mathrm{d}\theta$$

pour toute fonction g holomorphe dans la couronne $\mathrm{C}(r_1, r_2)$.

La proposition 1 permet donc de retrouver le premier lemme du premier cours sur les fonctions holomorphes, démontré à l'époque sous l'hypothèse additionnelle de la continuité de la dérivée. À partir de ce lemme, on avait montré avec les séries de Fourier l'existence du développement en série entière d'une fonction $f \in \mathrm{H}_c(\mathrm{D}(0,r))$. On déduit donc le résultat (Goursat, 1900) annoncé depuis longtemps :

$$\mathrm{H}(\Omega) = \mathrm{H}_c(\Omega).$$

Homotopies

On dit que deux chemins continus γ_0 et γ_1 tracés dans un ouvert Ω sont *homotopes dans* Ω s'il existe une déformation continue γ_s, $s \in [0,1]$, de γ_0 vers γ_1, formée de chemins γ_s continus tracés dans Ω. On voit que cela équivaut à dire qu'il existe une application continue φ, du carré $[0,1]^2$ dans Ω, telle que γ_0 et γ_1 correspondent aux images par φ du parcours des deux côtés verticaux du carré.

Il existe deux cas importants d'homotopies :

– les homotopies de lacets ; dans ce cas, tous les chemins γ_s, $s \in [0,1]$, sont des lacets : on a $\gamma_s(0) = \gamma_s(1)$ pour tout $s \in [0,1]$;

– les homotopies à extrémités fixées : dans ce cas on a $\gamma_s(0) = \gamma_0(0)$ et $\gamma_s(1) = \gamma_0(1)$ pour tout $s \in [0,1]$.

Techniquement, la proposition 1 ne s'applique que si φ est de classe C^1 : on dira alors qu'on a une C^1-homotopie. Si γ_0 et γ_1 sont de classe C^1 et homotopes au sens continu, on peut montrer par approximation qu'ils sont C^1-homotopes. Mais en réalité, la théorie choisit habituellement une autre voie pour se développer, la notion d'intégrale d'une fonction holomorphe f le long d'un chemin continu, expliquée plus bas.

Revenons, sous l'hypothèse supplémentaire que l'application $\varphi(s,t) = \gamma_s(t)$ soit de classe C^1 sur le carré $[0,1]^2$, sur les deux cas d'homotopie mentionnés ci-dessus.

– Pour une homotopie de lacets, on a $\gamma_s(0) = \gamma_s(1)$ pour tout $s \in [0,1]$; il en résulte que les chemins parcourus par l'application φ sur les deux côtés horizontaux sont les mêmes,

$$s \in [0,1] \to \varphi(s,0) = \gamma_s(0) = \gamma_s(1) = \varphi(s,1),$$

et leurs contributions s'annulent quand on parcourt le bord du carré (les sens sont opposés).

– Pour une homotopie à extrémités fixées, on a $\gamma_s(0) = \gamma_0(0)$ et $\gamma_s(1) = \gamma_0(1)$ pour tout $s \in [0,1]$. Il en résulte que l'application φ associée est constante sur chacun des deux côtés horizontaux du carré, donc les deux intégrales correspondantes sont nulles.

Dans les deux cas, la proposition 1 implique le résultat qui suit.

Corollaire. *Si deux chemins γ_0 et γ_1 de classe C^1 sont C^1-homotopes dans Ω (homotopie de lacets ou homotopie à extrémités fixes), on a*

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

pour toute $f \in \mathrm{H}(\Omega)$.

Cas particulier

Si on a deux chemins γ_0 et γ_1 dans Ω, de classe C^1, qui « ne se perdent jamais de vue » dans Ω,

$$\forall t \in [0,1], \quad [\gamma_0(t), \gamma_1(t)] \subset \Omega,$$

alors on peut définir une déformation φ de classe C^1 par la formule

$$\forall s,t \in [0,1], \quad \varphi(s,t) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t) \in \Omega,$$

et la proposition 1 donne

$$(1) \qquad \int_{\gamma_0} f(z)\,dz + \int_{[\gamma_0(1),\gamma_1(1)]} f(z)\,dz = \int_{[\gamma_0(0),\gamma_1(0)]} f(z)\,dz + \int_{\gamma_1} f(z)\,dz.$$

En particulier si les origines et extrémités sont les mêmes pour γ_0 et γ_1,

$$\gamma_0(0) = \gamma_1(0), \quad \gamma_0(1) = \gamma_1(1),$$

il y a égalité des intégrales de f sur γ_0 et γ_1. Cela va donner la possibilité, explicitée dans le paragraphe qui suit, de définir la « pseudo-intégrale » de f sur un chemin continu γ dans Ω, qui va d'un point $\mathrm{A} \in \Omega$ à un point $\mathrm{B} \in \Omega$, comme étant la valeur de l'intégrale sur n'importe quel chemin γ_0 de classe C^1, suffisamment proche de γ et ayant les mêmes extrémités A et B que γ.

Hors programme : intégrale le long d'un chemin continu

Proposition-définition. *Soit $\gamma : [0,1] \to \Omega$ un chemin* continu *; il existe $\rho > 0$ qui vérifie la propriété suivante : pour tous chemins γ_0, γ_1 de classe C^1 tels que*

$$\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = \gamma(0), \quad \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = \gamma(1) \quad \textit{et} \quad |\gamma_0(t) - \gamma_1(t)| < \rho$$

pour tout $t \in [0,1]$, on a l'égalité

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

pour toute $f \in \mathrm{H}(\Omega)$.

Il est donc raisonnable de définir $\int_\gamma f(z)\,dz$ comme étant la valeur commune de toutes ces intégrales (il ne s'agit donc pas d'une véritable intégrale).

Cette définition de l'intégrale sur les chemins continus permet un traitement plus commode des questions d'homotopie, et d'éliminer par exemple la discussion sur les C^1-homotopies.

Preuve. — Le compact γ^* est contenu dans Ω. Si $\Omega \neq \mathbb{C}$, on pose

$$\rho = \min\{d(z, \Omega^c) : z \in \gamma^*\} > 0,$$

et si $\Omega = \mathbb{C}$ on peut prendre $\rho = +\infty$. Pour tout point $t \in [0,1]$, le disque ouvert $\mathrm{D}(\gamma(t), \rho)$ est contenu dans Ω, et sous l'hypothèse de la proposition-définition, les deux points $\gamma_0(t)$ et $\gamma_1(t)$ sont dans ce disque $\mathrm{D}(\gamma(t), \rho)$: par convexité du disque, il en résulte que le segment $[\gamma_0(t), \gamma_1(t)]$ est contenu dans Ω, donc les chemins sont homotopes dans Ω (à extrémités fixes), d'où le résultat par l'équation (1).

Montrons l'existence d'un chemin C^1 proche de γ. Par convolution, on peut toujours approcher le chemin γ continu par un chemin δ de classe C^1 tel que, pour un ε vérifiant $0 < \varepsilon < \rho$, on ait

$$\max_{t \in [0,1]} |\gamma(t) - \delta(t)| < \varepsilon/2\,;$$

mais les origines et extrémités s'en trouvent un peu décalées. On fera une petite correction linéaire,

$$\gamma_0(t) = \delta(t) + (1-t)(\gamma(0) - \delta(0)) + t(\gamma(1) - \delta(1)),$$

qui donne un chemin γ_0 de classe C^1, à valeurs dans Ω, ayant les mêmes extrémités que γ et tel que $|\gamma_0(t) - \gamma(t)| < \varepsilon$ pour tout t.

À partir de cette extension de la notion d'intégrale, on trouve facilement le « bon énoncé » pour les homotopies, débarrassé de la restriction sur la classe C^1.

Corollaire 2. *Si deux chemins continus γ_0 et γ_1 sont homotopes dans Ω (homotopie de lacets ou homotopie à extrémités fixes), on a*

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

pour toute $f \in \mathrm{H}(\Omega)$.

Retour au programme. Intégrale sur le bord d'un triangle solide

C'est un cas particulier de l'équation (1). Si $\mathrm{T} = \mathrm{co}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) \subset \Omega$, posons

$$\varphi(s, t) = (1 - s)\mathrm{A} + s\big[(1 - t)\mathrm{B} + t\mathrm{C}\big].$$

Le parcours du bord du carré $\mathrm{K} = [0, 1]^2$ a pour image par cette application φ (de classe C^1) les parcours successifs des segments $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$, puis $[\mathrm{B}, \mathrm{C}]$, $[\mathrm{C}, \mathrm{A}]$ et finalement le segment nul $[\mathrm{A}, \mathrm{A}]$. On vérifie ainsi que

$$\int_{\varphi^{\mathrm{K}}} f(z)\,dz = \int_{\partial \mathrm{T}} f(z)\,dz,$$

qui est donc nulle si $f \in \mathrm{H}(\Omega)$.

Étoilés et simplement connexes

On dit que Ω *est étoilé* s'il existe un point $\mathrm{O} \in \Omega$ qui « voit tout » dans Ω, c'est-à-dire que $[\mathrm{O}, z] \subset \Omega$ pour tout $z \in \Omega$; dans ce cas, on dit plus précisément que Ω est étoilé par rapport au point O. En particulier, les ensembles convexes sont étoilés, par rapport à n'importe lequel de leurs points.

Proposition. *Si Ω est étoilé et si γ est un lacet dans Ω, alors*

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Preuve. — Le lacet γ ne perd pas de vue le point O : on peut déformer continûment le chemin $\gamma_0 = \gamma$ jusqu'au chemin constant $\gamma_1(t) = \mathrm{O}$, qui donne une intégrale nulle.

Primitives dans un ouvert étoilé

Encore une fois, c'est très semblable au cas réel, une fois que l'ingrédient spécifique est en place. On suppose que Ω est étoilé par rapport au point O, que f est holomorphe dans Ω et on pose pour tout $z \in \Omega$

$$\mathrm{F}(z) = \int_{[\mathrm{O}, z]} f(w)\,dw.$$

Alors $\mathrm{F}' = f$ dans Ω. En effet, si z est un point de Ω, si $h_0 > 0$ est assez petit pour que $\mathrm{D}(z, h_0)$ soit contenu dans Ω et si h est quelconque de module $< h_0$, le segment $[z, z+h]$

est contenu dans Ω ; comme Ω est étoilé, l'intégrale de f sur tout lacet dans Ω est nulle ; la nullité de l'intégrale de f sur le bord du triangle $\mathrm{co}(\mathrm{O}, z, z+h)$ donne

$$\mathrm{F}(z+h) - \mathrm{F}(z) = \int_{[z,z+h]} f(w)\, dw,$$

qui est le substitut parfait pour la relation de Chasles dont on se sert dans le cas réel. On écrit ensuite

$$\Bigl|\frac{\mathrm{F}(z+h) - \mathrm{F}(z)}{h} - f(z)\Bigr| \le \frac{1}{|h|}\Bigl|\int_{[z,z+h]} (f(w) - f(z))\, dw\Bigr|$$

$$\le \max\{|f(w) - f(z)| : w \in \overline{\mathrm{D}(z, |h|)}\}$$

qui tend vers 0 quand $h \to 0$, d'après la continuité de f au point z.

Remarque. On aurait pu déduire Goursat maintenant : la proposition 1 entraîne la nullité des intégrales des fonctions $f \in \mathrm{H}(\Omega)$ sur les bords des triangles solides contenus dans Ω, donc implique l'existence de primitive pour f si Ω est étoilé. Si Ω est un ouvert quelconque, soit $z_0 \in \Omega$ et $\mathrm{V} = \mathrm{D}(z_0, r)$ un disque contenu dans Ω ; alors ce disque est étoilé, donc f admet une primitive F dans ce disque. Maintenant, F appartient à $\mathrm{H}_c(\mathrm{V})$, donc elle est analytique d'après les cours précédents, donc sa dérivée f est analytique dans le disque, donc f' aussi, donc f' est continue au point z_0, qui est quelconque dans Ω, par conséquent f est dans $\mathrm{H}_c(\Omega)$.

Généralisation à un ouvert simplement connexe

On dit qu'un ouvert Ω est *simplement connexe* s'il est connexe et si tout lacet dans Ω est homotope à un point dans Ω. On en déduit par la proposition 1 que l'intégrale d'une fonction $f \in \mathrm{H}(\Omega)$ sur tout lacet dans Ω est nulle.

On peut alors modifier la preuve de l'existence de primitives : *dans un ouvert simplement connexe, toute $f \in \mathrm{H}(\Omega)$ admet des primitives.*

Déterminations du logarithme

Considérons l'ouvert

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x : x \text{ réel } \le 0\},$$

le plan complexe privé de la demi-droite réelle négative ou nulle. Cet ouvert est étoilé par rapport au point 1. Posons

$$\forall z \in \Omega, \quad \mathrm{F}(z) = \int_{[1,z]} \frac{dw}{w}$$

qui donne une primitive dans Ω de la fonction $z \to 1/z$.

Soit $z \in \Omega$ et posons $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, avec $r > 0$ et $-\pi < \theta < \pi$; si on va de 1 à z en allant d'abord de 1 à $|z| = r$ sur l'axe réel, puis en tournant de $|z|$ à z sur le cercle de rayon $|z|$, puis en revenant tout droit de z à 1, on obtient un lacet dans l'ouvert étoilé, donc l'intégrale de $w \to 1/w$ sur ce lacet est nulle. Cela signifie que $\mathrm{F}(z)$ peut aussi s'exprimer en suivant le chemin $1 \to r \to z$; on calcule ainsi

$$\mathrm{F}(z) = \int_{[1,z]} \frac{dw}{w} = \mathrm{F}(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \int_1^r \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_0^\theta \frac{r\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\,\mathrm{d}\alpha}{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} = \ln r + \mathrm{i}\theta.$$

Dans le disque $\mathrm{D}(1,1)$ on dispose du développement en série suivant, pour $z = 1 - w$

$$\ln z = \ln(1-w) = -\sum_{n\geqslant 1} \frac{w^n}{n}\cdot$$

La fonction définie par la somme de cette série est aussi une primitive de $1/z$. La différence $\mathrm{F}(z) - \ln z$ de ces deux fonctions a une dérivée nulle dans $\mathrm{D}(1,1)$, ce qui implique qu'elle est constante (intégrer tout droit à partir de 1), et la constante est nulle puisque $\ln 1 = 0 = \mathrm{F}(1)$ dans les deux formules. On dit que F est une *détermination du logarithme complexe* dans l'ouvert Ω.

Généralisations

Si f holomorphe ne s'annule pas dans Ω étoilé, il existe une fonction g holomorphe dans Ω telle que $\mathrm{e}^g = f$.

Il en résulte que $g' = f'/f$. En fait on définit d'abord g_0 comme étant une primitive de f'/f. La fonction $f\,\mathrm{e}^{-g_0}$ a pour dérivée $f'\,\mathrm{e}^{-g_0} - f\,\mathrm{e}^{-g_0}\,f'/f = 0$, donc cette fonction est égale à une constante C non nulle (puisque Ω est connexe). Il ne reste qu'à adapter la constante d'intégration, choisissant c tel que $\mathrm{C} = \mathrm{e}^c$, pour obtenir $f\,\mathrm{e}^{-g_0-c} = 1$.

Si Ω est un ouvert simplement connexe ne contenant pas 0, on peut trouver une primitive de $1/z$ dans Ω : *dans tout ouvert simplement connexe, on peut trouver des déterminations du logarithme.*

Plus généralement, *si Ω est simplement connexe, toute fonction $f \in \mathrm{H}(\Omega)$ qui ne s'annule pas dans Ω peut s'exprimer sous la forme $f = \mathrm{e}^g$, où g est holomorphe dans Ω.*

Formules de Cauchy

Dans un ouvert étoilé Ω toute fonction holomorphe g a une primitive holomorphe G, donc la fonction g a une intégrale nulle sur tout lacet γ tracé dans Ω,

$$\int_\gamma g(z)\,dz = \mathrm{G}(\gamma(b)) - \mathrm{G}(\gamma(a)) = 0.$$

Si $f \in \mathrm{H}(\Omega)$ et si z_0 est un point qui n'est pas sur γ^*, la fonction

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

prolongée par $g(z_0) = f'(z_0)$, est holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_0\}$, et continue dans Ω donc la singularité est artificielle, et g est holomorphe dans Ω. On a donc, quand Ω est étoilé,

$$0 = \int_\gamma g(z)\,dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz - f(z_0)\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,dz.$$

On a donc obtenu le résultat qui suit.

Proposition : une formule de Cauchy. *Si Ω est un ouvert étoilé, γ un lacet dans Ω et f une fonction holomorphe dans Ω, on a pour tout $z_0 \in \Omega \setminus \gamma^*$*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z_0)\,f(z_0) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz.$$

La formule est vraie aussi pour tout lacet dans un ouvert simplement connexe, ou bien dans un ouvert Ω quelconque si le lacet est homotope dans Ω à un point.

Formule de Cauchy homologique

Un *cycle* Γ est une somme formelle finie de lacets γ_j, de la forme $\Gamma = \sum_j n_j \gamma_j$, où les n_j sont des entiers relatifs, ce qui s'utilise en posant

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_j n_j \int_{\gamma_j} f(z)\,dz.$$

En particulier,

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\Gamma \frac{dw}{w-z} = \sum_j n_j \,\mathrm{Ind}_{\gamma_j}(z).$$

On pose

$$\Gamma^* = \bigcup_j \gamma_j^*.$$

On dit que le cycle Γ, composé de lacets dans Ω, est *homologue à* 0 *dans* Ω si

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0$$

pour tout z *qui n'est pas* dans Ω.

Remarque. Si γ est un lacet dans Ω, homotope dans Ω à un point, alors le cycle $\Gamma = \gamma$ est aussi homologue à 0 dans Ω.

En effet, pour tout point z extérieur à Ω la fonction $w \to 1/(w-z)$ est holomorphe dans Ω, donc d'intégrale nulle sur le lacet γ, homotope à 0 dans Ω.

Théorème : formule de Cauchy homologique. *On suppose que* Γ *est un cycle dans* Ω, *homologue à* 0 *dans* Ω. *Alors, pour toute fonction* $f \in \mathrm{H}(\Omega)$, *on a pour tout* $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$

$$\frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \mathrm{Ind}_\Gamma(z)\, f(z)\,; \quad \text{de plus, on a} \quad \int_\Gamma f(w)\,dw = 0.$$

Preuve. — On prolonge la formule

$$g(w,z) = \frac{f(w)-f(z)}{w-z},$$

valable pour $z \neq w$ dans Ω, en posant $g(z,z) = f'(z)$ lorsque $w = z$; on note que la fonction ainsi obtenue est holomorphe en z pour tout w fixé. On pose pour tout $z \in \Omega$

$$\Phi(z) = \int_\Gamma g(w,z)\,dw.$$

On prouve par dérivation sous l'intégrale que Φ est holomorphe dans Ω. Si z est dans $\Omega \setminus \Gamma^*$, on peut écrire

$$\Phi(z) = \int_\Gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw.$$

On pose

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* : \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0\}$$

et

$$\Phi_1(z) = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

L'ensemble Ω_1 est ouvert, Φ_1 est holomorphe dans Ω_1 et par l'hypothèse $\mathbb{C}$ est la réunion de Ω et Ω_1. Par ailleurs, l'indice est nul pour tout z dont le module est assez grand, donc Ω_1 est un voisinage de l'infini.

Si z est à la fois dans Ω et dans Ω_1 (ce qui implique en particulier que $z \notin \Gamma^*$, et permet de découper l'intégrale de $g(w, z)$ en deux parties), on a

$$\Phi(z) = \int_\Gamma \frac{f(w) - f(z)}{w-z}\,dw = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)\int_\Gamma \frac{1}{w-z}\,dw = \Phi_1(z).$$

On peut donc définir une fonction entière F en posant $\mathrm{F}(z) = \Phi(z)$ pour les points de Ω et $\mathrm{F}(z) = \Phi_1(z)$ pour les points de Ω_1. On voit que Φ_1 tend vers 0 à l'infini, donc F est entière, tend vers 0 à l'infini, donc elle est nulle par Liouville. On obtient ainsi la première affirmation de l'énoncé. Pour la seconde, on pose pour un point $z \notin \Gamma^*$

$$f_1(w) = (w-z)f(w).$$

Le premier résultat, appliqué à cette fonction f_1, montre que l'intégrale de f sur γ est nulle.

Théorème des résidus

Lemme. *Si f est holomorphe dans le disque épointé $\mathrm{D}^*(z_0, r_0)$ et si*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$$

est son développement de Laurent dans ce disque épointé, on a pour tout cercle $\gamma_r(z_0)$ de centre z_0 et de rayon r tel que $0 < r < r_0$

$$\int_{\gamma_r(z_0)} f(z)\,dz = 2\mathrm{i}\pi\, a_{-1}.$$

Le coefficient a_{-1} s'appelle le *résidu de f au point z_0*, noté $\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1}$.

Preuve. — On a vu précédemment que la série de Laurent de la fonction f converge normalement sur le cercle $\gamma_r(z_0)^*$, donc on peut commuter l'intégrale et la série. Toutes les fonctions $(z-z_0)^n$ pour $n \neq -1$ sont des dérivées continues, donc ont une intégrale nulle sur le lacet $\gamma_r(z_0)$. Il ne reste que

$$\int_{\gamma_r(z_0)} f(z)\,dz = a_{-1}\int_{\gamma_r(z_0)} (z-z_0)^{-1}\,dz = 2\mathrm{i}\pi\, a_{-1}.$$

Un sous-ensemble A d'un ouvert V est *discret dans* V si chaque point $x \in \mathrm{V}$ possède un voisinage W tel que $\mathrm{A} \cap \mathrm{W}$ contienne *au plus un* point de A ; il en résulte que A est fermé dans V. De manière équivalente, on peut dire que A est discret dans V si A est fermé dans V et si tous les points de A sont isolés.

Théorème. *Si* Γ *est un cycle dans* Ω, *homologue à* 0 *dans* Ω, *si* A *est un sous-ensemble discret dans* $\Omega \setminus \Gamma^*$ *et si* $f \in \mathrm{H}(\Omega \setminus \mathrm{A})$, *alors il n'existe qu'un nombre fini de points* $a \in \mathrm{A}$ *tels que* $\mathrm{Ind}_\Gamma(a) \neq 0$, *et*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\mathrm{i}\pi \sum_{a \in \mathrm{A}} \mathrm{Res}(f,a)\,\mathrm{Ind}_\Gamma(a).$$

Preuve. — Traitons d'abord le cas à un seul a. On pose $\Omega_1 = \Omega \setminus \{a\}$, $n_a = \mathrm{Ind}_\Gamma(a) \in \mathbb{Z}$, et

$$\Gamma_1 = \Gamma - n_a \gamma_r(a)$$

avec $r > 0$ assez petit pour que $\overline{\mathrm{D}(a,r)} \subset \Omega$. On vérifie que Γ_1 est homologue à 0 dans Ω_1 : le lacet γ_r qui fait un tour positif autour de a est homotope à zéro dans Ω, donc son indice est nul hors de Ω, donc Ind_{Γ_1} aussi :

$$z \notin \Omega \Rightarrow \mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(z) = \mathrm{Ind}_\Gamma(z) - n_a\,\mathrm{Ind}_{\gamma_r}(z) = 0 - 0 = 0\,;$$

le seul autre point extérieur à Ω_1 est a, et pour lui c'est fait pour,

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(a) = \mathrm{Ind}_\Gamma(a) - n_a\,\mathrm{Ind}_{\gamma_r}(a) = n_a - n_a = 0.$$

On a donc

$$0 = \int_{\Gamma_1} f(w)\,dw = \int_\Gamma f(w)\,dw - n_a \int_{\gamma_r(a)} f(w)\,dw,$$

ce qui donne le résultat dans ce cas.

Dans le cas général, on pose

$$\rho = \min\{d(w,\Omega^c) : w \in \Gamma^*\} > 0.$$

On montre que $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0$ pour tout z de l'ouvert Ω_1 formé des points z tels que $d(z,\Omega^c) < \rho$. Si R est assez grand pour que $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ contienne Γ^*, on voit que l'ensemble A_1 des points $a \in \mathrm{A}$ d'indice non nul est contenu dans le compact

$$\mathrm{K} = \{z : |z| \le \mathrm{R} \;\text{ et }\; d(z,\Omega^c) \ge \rho/2\},$$

et comme A est discret, cet ensemble A_1 est fini. Pour chaque $a \in \mathrm{A}_1$, on retranche du cycle Γ un multiple d'un cercle autour de a, comme ci-dessus : pour $r > 0$ assez petit, on pose

$$\Gamma_1 = \Gamma - \sum_{a \in \mathrm{A}_1} n_a \gamma_r(a)$$

et on généralise la preuve précédente.

Corollaire. *Si* Ω *est un ouvert étoilé,* γ *un lacet dans* Ω, A *un ensemble discret contenu dans* $\Omega \setminus \mathrm{A}$ *et* f *holomorphe dans* $\Omega \setminus \mathrm{A}$, *on a*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\mathrm{i}\pi \sum_{a \in \mathrm{A}} \mathrm{Res}(f,a)\,\mathrm{Ind}_\gamma(a).$$

Le résultat subsiste pour tous les lacets d'un simplement connexe.