cours 7, le 16 décembre 2009

Holomorphie

Sources possibles : Cartan, Rudin (ARC), Chatterji (vol. 2), Amar et Matheron, Yger, parmi beaucoup d'autres.

Dérivée complexe

Si la fonction f, à valeurs complexes, est définie dans un voisinage Ω d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$, on définit la dérivée complexe de f au point z_0 par

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h},$$

quand cette limite existe, où h tend vers 0 *par valeurs complexes* ; cela s'écrit aussi

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + o(|h|).$$

Quand la limite existe, on dira que f est $\mathbb{C}$-*dérivable au point* z_0.

Opérations élémentaires sur les fonctions $\mathbb{C}$-*dérivables* : si f et g sont $\mathbb{C}$-dérivables au point z_0, la somme $f + g$, le produit fg, le quotient f/g — si le dénominateur g ne s'annule pas au point z_0 — sont $\mathbb{C}$-dérivables au point z_0 ; les dérivées se calculent par les formules habituelles. Les preuves de ces propriétés dans le cas réel se généralisent immédiatement au cas complexe.

Exemples : le premier exemple évident est la fonction constante $f = \mathbf{1}$, pour laquelle $f'(z_0) = 0$ en tout point. Le deuxième exemple évident, mais un peu plus intéressant, est $f(z) = z$; dans ce cas,

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{(z_0 + h) - z_0}{h} = 1,$$

ce qui montre que $f'(z_0) = 1$ pour tout z_0.

En revanche, la fonction $f(z) = \overline{z}$ n'est $\mathbb{C}$-dérivable en aucun point :

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\overline{z_0 + h} - \overline{z}_0}{h} = \frac{\overline{h}}{h},$$

qui n'a pas de limite quand $h \to 0$: si $h = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, le quotient précédent vaut $\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}$, qui dépend de la direction suivant laquelle h tend vers 0.

D'après les opérations élémentaires : les fonctions polynomiales $z \to \mathrm{P}(z)$, avec $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, sont $\mathbb{C}$-dérivables en tout point ; les fonctions rationnelles $z \to \mathrm{P}(z)/\mathrm{Q}(z)$ sont $\mathbb{C}$-dérivables en dehors des pôles de la fraction (les zéros du polynôme Q).

Dérivée suivant un chemin

Si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\gamma : \mathrm{I} \to \Omega$ un chemin continu à valeurs dans l'ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et si γ est dérivable au point $t_0 \in \mathrm{I}$, on peut écrire pour s réel tendant vers 0 :

$$\gamma(t_0 + s) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)s + o(s).$$

Si la fonction f définie sur Ω est $\mathbb{C}$-dérivable au point $z_0 = \gamma(t_0)$, on peut écrire, en posant $h = \gamma(t_0 + s) - \gamma(t_0) = \gamma'(t_0)s + o(s)$,

$$f(\gamma(t_0 + s)) = f(\gamma(t_0) + h) = f(\gamma(t_0)) + f'(\gamma(t_0))\big(\gamma'(t_0)s + o(s)\big) + o(h)\,;$$

comme $h = \gamma'(t_0)s + o(s)$ est $\mathrm{O}(s)$, le terme $o(h)$ est aussi un $o(s)$, ce qui donne

$$f(\gamma(t_0 + s)) = f(\gamma(t_0)) + f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0)s + o(s),$$

et on a ainsi obtenu la dérivée au point t_0 de la composée $f \circ \gamma$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma(t))\Big|_{t=t_0} = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0).$$

Ici encore, le résultat a la même forme que dans le cas réel, et la preuve est une modification minime de la preuve réelle.

Équations de Cauchy-Riemann

Posons $z = x + \mathrm{i}y$ et considérons la fonction f comme une fonction de deux variables réelles, $(x, y) \to f(x + \mathrm{i}y)$. Calculer la dérivée partielle de f par rapport à y au point $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ revient à composer f avec le chemin « vertical » $\gamma(t) = z_0 + \mathrm{i}t$, et à dériver en $t = 0$; comme $\gamma'(0) = \gamma'(t) = \mathrm{i}$, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \mathrm{i}y_0) = \mathrm{i} f'(z_0)\,;$$

mais pour la dérivée par rapport à x, on utilise le chemin horizontal $\gamma(t) = z_0 + t$ dont la dérivée est 1, donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \mathrm{i}y_0) = f'(z_0).$$

C'est une première version des équations de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \mathrm{i}\,\frac{\partial f}{\partial x}(z_0), \tag{1}$$

ce qui peut s'exprimer par

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0, \quad \text{où on a posé} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial y}\Big)\,;$$

noter qu'avec cette définition, on trouve $\partial f/\partial \overline{z} = 1$ pour la fonction $f : z \to \overline{z}$, ce qui est bien raisonnable. Pour donner la forme la plus classique des équations de Cauchy-Riemann, on va poser $f(x + \mathrm{i}y) = \mathrm{U}(x, y) + \mathrm{i}\mathrm{V}(x, y)$, avec U et V fonctions réelles de deux variables, et on écrit la relation (1)

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{U} + \mathrm{i}\mathrm{V})(z_0) = \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{U} + \mathrm{i}\mathrm{V})(z_0),$$

qui donne, en séparant les parties réelles et imaginaires, les *équations de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}.$$

Cela signifie que le gradient de V est obtenu par rotation directe de $+\pi/2$ à partir de celui de U. On peut dire aussi que la fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable au point $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ si et seulement si : l'application $(x, y) \to \mathrm{F}(x, y)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ par

$$\mathrm{F}(x, y) = \bigl(\mathrm{U}(x, y), \mathrm{V}(x, y)\bigr)$$

est différentiable au point (x_0, y_0) et sa matrice jacobienne est de la forme

$$(\mathrm{dF})_{(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

matrice d'une similitude directe.

Exemple. Posant toujours $z = x + \mathrm{i}y$, on peut voir ainsi, en vérifiant les équations de Cauchy-Riemann que $z \to \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$ est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point $z_0 \in \mathbb{C}$, avec dérivée égale à e^{z_0} ; on retrouvera ce fait avec le théorème 1 et le développement en série entière de l'exponentielle.

Séries entières

On va faire quelques petits calculs en préliminaire. On repart de zéro ou presque : on connaît la série géométrique, mais on a oublié la convergence des dérivées de la série géométrique ; on va la retrouver rapidement. Si $0 < u < 1$, on constate en examinant le développement du binôme de $[u + (1-u)]^n$, dont tous les termes sont positifs, que

$$nu^{n-1}(1-u) + \frac{n(n-1)}{2}u^{n-2}(1-u)^2 \le (u + (1-u))^n = 1\,;$$

si $0 \le t < u < 1$, en utilisant l'inégalité précédente, on voit que

$$(2) \qquad \sum_{n\geqslant 1} nt^{n-1} = \sum_{n\geqslant 1}\bigl(nu^{n-1}\bigr)(t/u)^{n-1} \le \frac{1}{1-u}\sum_{m\geqslant 0}(t/u)^m = \frac{1}{1-u}\,\frac{u}{u-t},$$

et que

$$(3) \qquad \sum_{n\geqslant 2} n(n-1)t^{n-2} = \sum_{n\geqslant 2}\bigl(n(n-1)u^{n-2}\bigr)(t/u)^{n-2}$$

$$\le \frac{2}{(1-u)^2}\sum_{m\geqslant 0}(t/u)^m = \frac{2}{(1-u)^2}\,\frac{u}{u-t}.$$

On pourrait aussi utiliser nos connaissances d'intégration pour justifier la convergence des séries précédentes : pour une série de fonctions positives, on sait qu'on peut toujours intervertir série et intégrale ; comme la fonction $x \to \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ est croissante sur $[0, 1]$ (*a priori*, à valeurs dans $[0, +\infty]$), on a si $0 < u < v < 1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nu^{n-1} \le \frac{1}{v-u}\int_u^v \Bigl(\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}\Bigr)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{v-u}\sum_{n=1}^{+\infty}(v^n - u^n) = \frac{1}{(1-v)(1-u)},$$

ce qui montre que la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} nu^{n-1}$ converge ; ensuite, si $0 \le t < u$,

$$\frac{1}{(1-u)(1-t)} = \frac{1}{u-t} \int_t^u \Bigl(\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} \Bigr) \,\mathrm{d}x \le \sum_{n=1}^{+\infty} nu^{n-1} \,;$$

en faisant tendre t et v vers u on retrouve

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nu^{n-1} = \frac{1}{(1-u)^2}.$$

On peut procéder de même pour la série $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)u^{n-2}$.

Dans la suite, on notera $\mathrm{D}(z_0, r_0)$ le disque ouvert de centre z_0 et de rayon $r_0 > 0$,

$$\mathrm{D}(z_0, r_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r_0\}.$$

Théorème 1. *Si la série entière* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *converge au point* $z_0 \ne 0$, *alors elle converge absolument pour tout* z *tel que* $|z| < |z_0|$ *; de plus, la convergence est normale dans tout disque fermé* $\overline{\mathrm{D}(0,\rho)}$ *tel que* $\rho < |z_0|$. *La fonction* f *définie dans le disque* $\mathrm{D}(0, |z_0|)$ *par*

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$$

est $\mathbb{C}$*-dérivable dans ce disque, et sa dérivée est la somme de la série dérivée, convergente dans le même disque,*

$$f'(z) = \sum_{n\geqslant 1} na_n z^{n-1}.$$

Il en résulte que f *est indéfiniment* $\mathbb{C}$*-dérivable dans le disque* $\mathrm{D}(0, |z_0|)$, *et*

$$f^{(n)}(0) = n!\, a_n$$

pour tout entier $n \ge 0$.

Preuve. — Si la série $\sum a_n z_0^n$ converge, alors $a_n z_0^n$ est bornée en module, disons par M : si on pose $r_0 = |z_0| > 0$, on a

$$\forall n \ge 0, \quad |a_n| \le \frac{\mathrm{M}}{r_0^n}.$$

La série $\sum a_n z^n$ converge alors absolument pour tout $|z| < r_0$,

$$\sum_{n\geqslant 0} |a_n||z|^n \le \mathrm{M} \sum_{n\geqslant 0} (|z|/r_0)^n = \frac{\mathrm{M}r_0}{r_0 - |z|},$$

et la série converge normalement dans tout disque de rayon $\rho < r_0$: le sup du module de la fonction $u_n(z) = a_n z^n$ dans le disque fermé de rayon ρ vaut $v_n = |a_n|\rho^n$, et la série numérique majorante $\sum v_n$ est convergente, d'après le calcul précédent qui donne la convergence absolue en $z = \rho$. Posons pour tout $z \in \mathrm{D}(0, r_0)$

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n.$$

La série dérivée converge aussi, absolument, dans le même disque : si $|z| < r_0$,

$$\sum_{n \geqslant 1} n|a_n||z|^{n-1} \leq \frac{\mathrm{M}}{r_0} \sum_{n \geqslant 1} n(|z|/r_0)^{n-1},$$

qui converge d'après (2), puisque $t = |z|/r_0 < 1$. Posons pour tout $z \in \mathrm{D}(0, r_0)$

$$g(z) = \sum_{n \geqslant 1} n a_n z^{n-1},$$

et montrons que la somme $g(z)$ de la série dérivée est la dérivée complexe de la fonction f. Si $z \in \mathrm{D}(0, r_0)$, choisissons ρ tel que $|z| < \rho < r_0$; si h est non nul mais assez petit pour que $|z| + |h| < \rho$, on aura

$$\bigl|(z+h)^n - z^n - nz^{n-1}h\bigr| = \Bigl|\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} h^k\Bigr| \leq \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |z|^{n-k}|h|^k$$

$$= (|z| + |h|)^n - |z|^n - n|z|^{n-1}|h| = n(n-1)\rho_1^{n-2}|h|^2/2 \leq n(n-1)\rho^{n-2}|h|^2,$$

pour un ρ_1 tel que $|z| < \rho_1 < |z| + |h|$, où on a utilisé Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour la fonction réelle $u \to u^n$, entre les points $|z|$ et $|z| + |h|$. On en déduit

$$\Bigl|\sum_{n \geqslant 1} a_n\bigl((z+h)^n - z^n - nz^{n-1}h\bigr)\Bigr| = \bigl|f(z+h) - f(z) - g(z)h\bigr| \leq$$

$$\leq \sum_{n \geqslant 2} n(n-1)|a_n|\rho^{n-2}|h|^2 \leq \frac{\mathrm{M}}{r_0^2}\Bigl(\sum_{n \geqslant 2} n(n-1)(\rho/r_0)^{n-2}\Bigr)|h|^2$$

et comme la série ci-dessus converge d'après (3), on obtient que

$$f(z+h) - f(z) - g(z)h = \mathrm{O}(h^2),$$

ce qui prouve que $f'(z) = g(z)$, pour tout z dans le disque ouvert $\mathrm{D}(0, r_0)$.

Exemples : e^z et ses dérivées ; $\sin z$, $\cos z$, etc. Fonctions de Bessel, par exemple

$$\mathrm{J}_0(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{4^n n!\, n!} \ ;$$

avec le critère de d'Alembert on voit que le rayon de convergence de cette série entière est infini. En dérivant deux fois on obtient

$$z\mathrm{J}_0'(z) = \sum_{n \geqslant 1} 2n \frac{(-1)^n z^{2n}}{4^n n!\, n!}, \quad z^2 \mathrm{J}_0''(z) = \sum_{n \geqslant 1} (2n)(2n-1) \frac{(-1)^n z^{2n}}{4^n n!\, n!},$$

ce qui implique par un calcul facile que la fonction J_0 vérifie sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle de Bessel de paramètre 0,

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + x^2 y(x) = 0.$$

Holomorphie
On dit que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est *holomorphe* dans l'ouvert Ω du plan complexe si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω. On désignera par $\mathrm{H}(\Omega)$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions holomorphes dans Ω.

Pour établir les premiers résultats, on supposera que la dérivée f' est continue dans Ω, et on désignera par $\mathrm{H}_c(\Omega)$ le sous-espace de $\mathrm{H}(\Omega)$ formé des f holomorphes telles que f' soit continue dans Ω. On verra plus loin que cette distinction n'a pas lieu d'être.

Théorème (Goursat, 1900).

$$\mathrm{H}_c(\Omega) = \mathrm{H}(\Omega).$$

Intégrales curvilignes
Si $\gamma : [a, b] \to \Omega$ est un chemin de classe C^1 et g une fonction complexe continue définie dans Ω, on posera

$$\int_\gamma g(z)\, dz := \int_a^b g(\gamma(t))\gamma'(t)\, \mathrm{d}t.$$

Par exemple, on notera $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ le parcours du cercle de rayon $r > 0$ dans le sens direct, défini par

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \quad \gamma_r(\theta) = r\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Si g est définie dans un ouvert Ω contenant le cercle $\gamma_r^* = \gamma_r([0, 2\pi])$, on obtient par le changement de variable $z = r\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, qui donne $dz = r\, \mathrm{i}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, \mathrm{d}\theta$,

$$\int_{\gamma_r} g(z)\, \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} g(\gamma_r(\theta)) \frac{\gamma_r'(\theta)}{\gamma_r(\theta)}\, \mathrm{d}\theta = \mathrm{i} \int_0^{2\pi} g(r\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\, \mathrm{d}\theta.$$

Si $\gamma : [a, b] \to \Omega$ est un chemin continu et de classe C^1 par morceaux, il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_\mathrm{N} = b$ de $[a, b]$ telle que γ soit de classe C^1 sur chaque intervalle $[a_j, a_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, \mathrm{N} - 1$; on pose dans ce cas

$$\int_\gamma g(z)\, dz := \sum_{j=0}^{\mathrm{N}-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} g(\gamma(t))\gamma'(t)\, \mathrm{d}t.$$

Chemins fermés (ou lacets)
On dit qu'un chemin $\gamma : [a, b] \to \Omega$, continu et de classe C^1 par morceaux, est un *chemin fermé* ou *lacet* dans Ω si $\gamma(b) = \gamma(a)$.

Proposition. *Si $f \in \mathrm{H}_c(\Omega)$, et si $\gamma : [a, b] \to \Omega$ est un chemin continu et de classe C^1 par morceaux dans Ω, on a*

$$\int_\gamma f'(z)\, dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

En particulier, si γ est un chemin fermé dans Ω, on a

$$\int_\gamma f'(z)\, dz = 0.$$

Preuve. — On pose $\mathrm{G}(t) = f(\gamma(t))$, $t \in [a,b]$. Alors, sur tout sous-intervalle $[a_j, a_{j+1}]$ sur lequel γ est de classe C^1, on a $\mathrm{G}'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$; comme f' est supposée continue, on peut affirmer que l'intégrale de la dérivée continue G' est la différence des valeurs aux bornes,

$$\int_{a_j}^{a_{j+1}} f'(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a_j}^{a_{j+1}} \mathrm{G}'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{G}(a_{j+1}) - \mathrm{G}(a_j).$$

Ainsi,

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = \sum_{j=0}^{\mathrm{N}-1} (\mathrm{G}(a_{j+1}) - \mathrm{G}(a_j)) = \mathrm{G}(a_\mathrm{N}) - \mathrm{G}(a_0) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Développement en série de Laurent

On suppose que $0 \le r_1 < r_2 \le +\infty$; la couronne ouverte, de rayons r_1, r_2 et centrée en 0, est l'ensemble

$$\mathrm{C} = \mathrm{C}(r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}.$$

Par exemple, le plan épointé $\mathbb{C}^*$ est la couronne $\mathrm{C}(0,\infty)$.

Lemme. *Si $\mathrm{C} = \mathrm{C}(r_1, r_2)$ est une couronne ouverte centrée en 0 et si $g \in \mathrm{H}_c(\mathrm{C})$, alors l'intégrale*

$$\frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\gamma_r} g(z)\,\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta$$

sur les cercles de rayons r, où $r_1 < r < r_2$, est constante.

Preuve. — On dérive en r l'intégrale

$$\mathrm{J}(r) = \int_0^{2\pi} g(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta\,;$$

comme la dérivée complexe g' est supposée continue, on obtient par dérivation sous le signe somme

$$\mathrm{J}'(r) = \int_0^{2\pi} g'(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

En posant $g_r(\theta) = g(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$, on a $g_r'(\theta) = r\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,g'(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ et

$$r\,\mathrm{i}\,\mathrm{J}'(r) = \int_0^{2\pi} g'(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})r\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} g_r'(\theta)\,\mathrm{d}\theta = g_r(2\pi) - g_r(0) = 0.$$

Théorème 2. *Soient $0 \le r_1 < r_2 \le +\infty$, et considérons la couronne*

$$\mathrm{C} = \mathrm{C}(r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}\,;$$

si $f \in \mathrm{H}_c(\mathrm{C})$, il existe des coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, uniques, tels que

$$\forall z \in \mathrm{C}, \quad f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$$

(convergence bilatérale, en $+\infty$ et $-\infty$). De plus, la série converge normalement sur tout compact de la couronne. On a pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout r tel que $r_1 < r < r_2$

$$a_n = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^n} \frac{dz}{z},$$

ou bien

$$a_n r^n = \int_0^{2\pi} f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\ ;$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on en déduit l'inégalité de Cauchy

$$r^n |a_n| \le \mathrm{M}_r(f) := \max\{|f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})| : \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Preuve. — Soit r tel que $r_1 < r < r_2$; la fonction f_r définie par $f_r(\theta) = f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ est 2π-périodique de classe C^1 donc représentable en tout point θ par la somme de sa série de Fourier, bilatéralement convergente

(4) $$f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f_r)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\ ;$$

mais

$$\frac{c_n(f_r)}{r^n} = \int_0^{2\pi} f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) r^{-n}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \frac{f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$$

est l'intégrale sur le cercle de rayon r de la fonction $g(z) = z^{-n} f(z)$ holomorphe sur la couronne, donc par le lemme précédent l'intégrale est indépendante de r ; on peut par conséquent poser $a_n = c_n(f_r) r^{-n}$. Alors $c_n(f_r) = a_n r^n$ et l'équation (4) devient

$$f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},$$

ce qui donne, pour tout $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ de la couronne,

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n.$$

Supposons maintenant que

(5) $$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^n,$$

pour tout z de la couronne, où la série est supposée converger des deux côtés. Montrons que cette série converge normalement sur tout compact K de la couronne ouverte : il existe deux rayons ρ_1, ρ_2 tels que $r_1 < \rho_1 \le \rho_2 < r_2$ et tels que K soit contenu dans la couronne fermée de rayons ρ_1 et ρ_2. La série entière $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$, partie positive de la série (5), converge au point $\rho_2 \in \mathrm{C}$; on en déduit par le théorème 1 la convergence normale de la partie positive $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ sur le disque fermé de rayon ρ_2, en particulier la convergence normale sur K. En utilisant la convergence au point ρ_1 et un changement $\zeta = 1/z$, on voit que la série entière $\sum_{n>0} b_{-n} \zeta^n$ converge au point $1/\rho_1$; on en déduit la convergence normale de la partie négative de la série (5) dans le complémentaire de $D(0, \rho_1)$, donc sur K. On obtient donc la convergence normale de la série sur tout compact de la couronne.

La convergence normale de la série (5) permet de calculer les coefficients de Fourier de f_r en intervertissant la série et l'intégrale :

$$c_n(f_r) = \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{m \in \mathbb{Z}} b_m r^m \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} m\theta} \Big) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i} n\theta} \, \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = b_n r^n \,;$$

on constate alors que $b_n = a_n$, et la preuve de l'unicité est achevée. La majoration de Cauchy est facile, puisque pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$|a_n| \, r^n = |c_n(f_r)| \leq \int_0^{2\pi} |f_r(x)| \, \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} \leq \|f_r\|_\infty = \mathrm{M}_r(f).$$

Conséquences : singularités artificielles

Jusqu'à présent on a travaillé avec des couronnes centrées en 0. On sera amené à translater cette situation, et à considérer des séries de Laurent de la forme

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n,$$

correspondant à une couronne centrée en z_0. On parlera de *série entière en* $z - z_0$ pour les expressions ne contenant que des puissances positives ou nulles,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Lemme. *Si f est holomorphe (avec f' continue) dans le disque épointé $\mathrm{D}^*(z_0, r_0)$ et si $(z - z_0) f(z)$ tend vers 0 lorsque $z \to z_0$, alors f admet un prolongement holomorphe $\widetilde{f}$ au disque $\mathrm{D}(z_0, r_0)$, qui est donné par la somme d'une série entière en $z - z_0$*

$$\forall z \in \mathrm{D}(z_0, r_0), \quad \widetilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Preuve. — Par translation, on peut supposer $z_0 = 0$. D'après le théorème 2, on peut développer f en série de Laurent dans la couronne $\mathrm{C}(0, r_0) = \mathrm{D}^*(0, r_0)$,

$$0 < |z| < r_0 \Rightarrow f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n.$$

Si $z f(z)$ tend vers 0 quand $z \to 0$, on a $r \mathrm{M}_r(f) \to 0$ quand $r \to 0$. Pour $n < 0$, il en résulte par les inégalités de Cauchy que

$$|a_n| \leq r^{-n} \mathrm{M}_r(f) = r^{-n-1} r \mathrm{M}_r(f),$$

qui tend vers 0 puisque $-n - 1 \geq 0$, qui implique que r^{-n-1} reste borné au voisinage de 0 ; en conséquence, on obtient $a_n = 0$ pour tout $n < 0$. Si on pose

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

pour tout $z \in \mathrm{D}(0, r_0)$, on obtient le prolongement voulu.

Corollaire. *Si* $f \in \mathrm{H}_c(\mathrm{D}(z_0, r_0))$, *alors* f *est donnée par la somme d'une série entière en* $z - z_0$,

$$\forall z \in \mathrm{D}(z_0, r_0), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Il en résulte que f *est indéfiniment* $\mathbb{C}$*-dérivable dans* $\mathrm{D}(z_0, r_0)$, *et pour tout* $n \geq 0$ *on a*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Preuve. — On va effectuer quelques contorsions, pour pouvoir utiliser les résultats déjà démontrés, plutôt que de refaire la même démonstration dans la nouvelle situation : la restriction f_1 de la fonction f au disque épointé $\mathrm{D}^*(z_0, r_0)$ est holomorphe et on voit que $(z - z_0) f_1(z)$ tend vers $(z_0 - z_0) f(z_0) = 0$ quand $z \to z_0$. D'après le lemme précédent, on peut prolonger f_1 au disque $\mathrm{D}(z_0, r_0)$, et comme ce prolongement est continu, il est nécessairement égal à f ; de plus, on a prouvé que le prolongement est développable en série entière, donc f est développable.

Analyticité

Théorème. *Si* $f \in \mathrm{H}_c(\Omega)$, *alors* f *est indéfiniment* $\mathbb{C}$*-dérivable dans* Ω. *Si* $z_0 \in \Omega$ *et si on pose* $r_0 = \mathrm{dist}(z_0, \Omega^c)$, *on a pour tout* $z \in \mathrm{D}(z_0, r_0)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Preuve. — La fonction f est holomorphe dans $\mathrm{D}(z_0, r_0)$; par le corollaire précédent, elle est développable en série entière en $z - z_0$ dans ce disque, et les coefficients de la série entière sont calculables à partir des dérivées successives, comme indiqué dans ce corollaire.

Si f est holomorphe (avec f' continue) sur $\mathbb{C}$, on peut appliquer le théorème précédent avec $z_0 = 0$ et $r_0 = +\infty$: la série de Taylor de f à l'origine est de rayon infini, et représente f sur $\mathbb{C}$. On dit que f est une *fonction entière*.

Théorème de Liouville. *Si* f *est une fonction holomorphe (avec* f' *continue) sur* $\mathbb{C}$ *et si* $|f(z)|$ *est* $\mathrm{O}(|z|^{\mathrm{N}})$ *quand* $|z|$ *tend vers* $+\infty$, *alors* f *est une fonction polynomiale de degré* $\leq \mathrm{N}$ *; si* $|f(z)|$ *est* $o(|z|^{\mathrm{N}})$ *quand* z *tend vers* $+\infty$, f *est une fonction polynomiale de degré* $< \mathrm{N}$, *en particulier,* f *est nulle si elle tend vers* 0 *à l'infini.*

Preuve. — C'est pratiquement la même que celle des singularités artificielles, mais en faisant tendre r vers l'infini au lieu de 0. Si $|f(z)|$ est $\mathrm{O}(|z|^{\mathrm{N}})$ à l'infini, on a

$$\mathrm{M}_r(f) = \mathrm{O}(r^{\mathrm{N}})$$

donc, par les inégalités de Cauchy,

$$|a_n| \leq r^{-n} \mathrm{M}_r(f) \leq \mathrm{K} r^{\mathrm{N}-n},$$

qui tend vers 0 à l'infini pour tout $n > \mathrm{N}$. On a donc $a_n = 0$ pour tout $n > \mathrm{N}$, et le développement en série se réduit à une fonction polynomiale de degré $\leq \mathrm{N}$.

Si f tend vers 0 à l'infini, $\mathrm{M}_r(f)$ tend vers 0 à l'infini, donc $r^{-n} \mathrm{M}_r(f)$ tend vers 0 pour tout $n \geq 0$. Pour ce dernier cas, on aurait pu étudier $f(1/z)$ pour $z \to 0$, et exploiter les résultats déjà obtenus pour les singularités artificielles.

Liouville, variante avec $\operatorname{Re} f$: *si f est entière et si* $\operatorname{Re} f(z)$ *est* $\mathrm{O}(|z|^{\mathrm{N}})$ *quand* $|z| \to \infty$, *on obtient la même conclusion : f est une fonction polynomiale de degré* $\le \mathrm{N}$.

Preuve. — On va utiliser la série de Fourier réelle de $\operatorname{Re} f_r$: si $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et si $a_n = u_n + \mathrm{i}\, v_n$, avec u_n, v_n réels,

$$\operatorname{Re} f_r(\theta) = u_0 + \sum_{n\geqslant 1} r^n \big(u_n \cos(n\theta) - v_n \sin(n\theta)\big).$$

L'égalité de Bessel-Parseval sur le cercle de rayon r donne

$$u_0^2 + \sum_{n\geqslant 1} r^{2n} \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} = \int_0^{2\pi} |\operatorname{Re} f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2 \,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \le \max\{|\operatorname{Re} f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2 : \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Sous l'hypothèse de la variante, on obtient qu'il existe une constante K telle qu'on ait $r^{2n}(u_n^2 + v_n^2) = r^{2n}|a_n|^2 \le 2\mathrm{K}^2 r^{2\mathrm{N}}$ pour tout $r > 0$ et tout $n > 0$, ce qui permet de conclure comme avant.

Théorème de D'Alembert : *Si* $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ *est un polynôme de degré* ≥ 1, *il admet au moins une racine complexe.*

Preuve. — Si P est un polynôme de degré ≥ 1, on voit que $|\mathrm{P}(z)| \to +\infty$ quand $|z| \to +\infty$; si P n'avait pas de zéro, on pourrait poser $f(z) = 1/\mathrm{P}(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, et f tendrait vers 0 à l'infini. D'après Liouville, on aurait $f = 0$, ce qui est une contradiction, puisque les valeurs de f sont des inverses, nécessairement non nuls.

Principe du prolongement analytique, zéros isolés

Lemme. *Si $f \in \mathrm{H}_c(\mathrm{D}(z_0, r_0))$ est non identiquement nulle, il existe r_1, $0 < r_1 \le r_0$ tel que f ne s'annule pas dans le disque épointé* $\mathrm{D}^*(z_0, r_1)$.

Preuve. — On sait que f est développable en série entière en $z - z_0$ dans le disque $\mathrm{D}(z_0, r_0)$; si f n'est pas identiquement nulle, les coefficients de cette série ne peuvent pas être tous nuls. Soit n_0 le plus petit entier n tel que a_n soit non nul. On peut écrire

$$f(z) = (z - z_0)^{n_0} \big(a_{n_0} + a_{n_0+1}(z - z_0) + \cdots\big).$$

La série entière

$$g(z) = a_{n_0} + a_{n_0+1}(z - z_0) + \cdots$$

converge dans le disque $\mathrm{D}(z_0, r_0)$; sa somme est continue, non nulle quand $z = z_0$. Il existe donc r_1, $0 < r_1 \le r_0$, tel que g soit non nulle dans $\mathrm{D}(z_0, r_1)$. On voit que $f(z)$ ne peut pas s'annuler dans $\mathrm{D}^*(z_0, r_1)$.

Théorème. *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f \in \mathrm{H}_c(\Omega)$; si f admet une suite (z_n) de zéros qui s'accumulent en un point $\zeta \in \Omega$, $z_n \ne \zeta$, alors f est identiquement nulle dans Ω.*

Preuve. — Soit $\mathrm{D}(\zeta, r)$ un disque contenu dans Ω ; comme f ne vérifie pas la conclusion d'isolation de zéro du lemme précédent, on sait que f est identiquement nulle dans ce disque ouvert. Il en résulte que toutes les dérivées de f sont nulles dans ce disque. Posons

$$\mathrm{Z} = \{z \in \Omega : f^{(n)}(z) = 0,\ \forall n \ge 0\}.$$

Cet ensemble est fermé, puisque toutes les fonctions dérivées $f^{(n)}$ sont continues. Mais il est aussi ouvert, par analyticité, et non vide parce que $\zeta \in \mathrm{Z}$. Comme Ω est connexe, il en résulte que $\mathrm{Z} = \Omega$, en particulier, f est identiquement nulle dans Ω.