Exercice résolu. On fixe un nombre complexe $a \notin \mathbb{Z}$; on va appliquer le théorème de Dirichlet à la fonction 2π-périodique f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ax}$ quand $-\pi \le x < \pi$: en effet, cette fonction est C^1 par morceaux, au sens qui a été donné dans le cours n° 1. On trouve pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,nt}\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(a-n)t}\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(a-n)\pi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,(a-n)\pi}}{2\pi\,\mathrm{i}\,(a-n)}$$

et d'après le théorème de Dirichlet, appliqué au point $x_0 = \pi$, on a

$$\frac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \lim_n (\mathrm{S}_n f)(\pi) = \lim_n \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\pi},$$

donc

$$\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,a\pi}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,a\pi}}{2} = \cos(a\pi) = \lim_n \sum_{k=-n}^{n} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(a-k)\pi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,(a-k)\pi}}{2\pi\,\mathrm{i}\,(a-k)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\pi} = \lim_n \sum_{k=-n}^{n} \frac{\sin(a\pi)}{\pi(a-k)},$$

et on trouve par conséquent, pour tout a non entier, une formule célèbre due à Euler

$$\pi\,\mathrm{cotan}(a\pi) = \lim_n \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{a-k} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2a}{a^2-n^2}.$$

On obtient une autre formule d'Euler (représentation du sinus en produit infini) par intégration : pour $-1 < x < 1$, l'égalité

$$\int_0^x \Bigl(\pi\,\mathrm{cotan}(\pi t) - \frac{1}{t}\Bigr)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \Bigl(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2-n^2}\Bigr)\,\mathrm{d}t$$

donne, en choisissant les primitives nulles à l'origine

$$\ln\Bigl(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\Bigr) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\Bigl(1 - \frac{x^2}{n^2}\Bigr).$$

On en déduit pour tout $z \in \mathbb{C}$ l'égalité

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{+\infty} \Bigl(1 - \frac{z^2}{n^2}\Bigr).$$

En effet, les deux membres sont des fonctions entières, et elles sont égales sur l'intervalle ouvert $(-1,1)$, donc partout (principe du prolongement analytique).

Remarque. Dans la *preuve* du théorème de Dirichlet, on *symétrise* la fonction donnée en regroupant les valeurs de part et d'autre de la discontinuité éventuelle. On aurait pu faire l'exercice à partir de la fonction 2π-périodique *continue* définie par $\cos\bigl(a(\pi - |x|)\bigr)$ sur $[-\pi,\pi]$, mais à mon avis, c'est beaucoup moins joli (essayez vous-même).

Retour aux espaces de Hilbert

Ont déjà été rédigés dans le résumé de cours précédent les points suivants :

– projection orthogonale dans le cas d'un sous-espace vectoriel F de dimension finie engendré par un système orthonormé (fini) $(f_j)_{j\in\mathrm{J}}$,

– la projection orthogonale $\mathrm{P_F}x$ de x sur F réalise la distance de x à F.

– Inégalité de Bessel pour un système orthonormé quelconque.

– Base hilbertienne, représentation comme famille sommable, égalité de Bessel.

Maintenant, quelque chose que je n'ai pas fait pendant le cours : on va traduire et « généraliser » dans le langage des familles sommables l'étude des séries de vecteurs orthogonaux : il ne s'agit pas de quelque chose de profond, juste une question d'esthétique, et aussi de souplesse d'utilisation. Mais on va essentiellement répéter (on pourrait se ramener aux séries, mais ça, c'est pas joli) les arguments essentiels qu'on a employés dans le cas des séries.

Proposition 1. *Considérons une famille $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de vecteurs deux à deux orthogonaux dans un espace de Hilbert* H. *Pour que la famille $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ soit sommable dans* H, *il faut et il suffit que*

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} \|u_i\|^2 < +\infty.$$

Quand la famille est sommable dans H, *on a*

$$\Bigl\|\sum_{i\in\mathrm{I}} u_i\Bigr\|^2 = \sum_{i\in\mathrm{I}} \|u_i\|^2.$$

Preuve. — Dans un sens, supposons que

$$\mathrm{S} := \sum_{i\in\mathrm{I}} \|u_i\|^2 < +\infty.$$

Pour tout entier $n \ge 0$, considérons la famille A_n (non vide) formée des sous-ensembles finis $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ tels que

$$\sum_{j\in\mathrm{J}} \|u_j\|^2 > \mathrm{S} - 2^{-n},$$

et l'ensemble non vide $\mathrm{E}_n \subset \mathrm{H}$ formé des vecteurs obtenus en faisant les « sommes partielles » $\mathrm{U_J}$ des u_j sur les ensembles $\mathrm{J} \in \mathrm{A}_n$,

$$\mathrm{E}_n = \bigl\{\mathrm{U_J} : \mathrm{J} \in \mathrm{A}_n\bigr\}, \quad \mathrm{U_J} := \sum_{j\in\mathrm{J}} u_j.$$

On va remarquer que le diamètre de E_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini ; en effet, si J_1 et J_2 sont deux éléments de A_n, on a

$$\sum_{j\in\mathrm{J}_1\setminus\mathrm{J}_2} \|u_j\|^2 \le \sum_{i\in\mathrm{I}\setminus\mathrm{J}_2} \|u_j\|^2 = \mathrm{S} - \sum_{j\in\mathrm{J}_2} \|u_j\|^2 < 2^{-n}, \quad \text{et de même} \sum_{j\in\mathrm{J}_2\setminus\mathrm{J}_1} \|u_j\|^2 < 2^{-n}.$$

Par Pythagore,

$$\|\mathrm{U}_{\mathrm{J}_1} - \mathrm{U}_{\mathrm{J}_2}\|^2 = \Bigl\|\sum_{j\in\mathrm{J}_1\setminus\mathrm{J}_2} u_j - \sum_{j\in\mathrm{J}_2\setminus\mathrm{J}_1} u_j\Bigr\|^2 = \sum_{j\in\mathrm{J}_1\setminus\mathrm{J}_2} \|u_j\|^2 + \sum_{j\in\mathrm{J}_2\setminus\mathrm{J}_1} \|u_j\|^2 < 2^{-n} + 2^{-n}.$$

Par continuité de la norme, on obtient $\|x - y\|^2 \le 2^{-n+1}$ pour tous les points x, y de l'adhérence F_n de E_n. Les ensembles F_n sont une suite de fermés non vides, décroissants et de diamètre tendant vers 0 : dans l'espace complet H, leur intersection est non vide, et contient un point unique, disons v. Ce vecteur v est la somme de la famille. En effet, notons d'abord que pour tout entier n et tout $\mathrm{J} \in \mathrm{A}_n$, les vecteurs v et $\mathrm{U_J}$ sont deux éléments de F_n, donc

$$\|v - \mathrm{U_J}\|^2 \le 2^{-n+1}\,;$$

à tout $\varepsilon > 0$ donné on peut associer un entier n_0 tel que $2^{-n_0+1} < \varepsilon$, puis un $\mathrm{J}_0 \in \mathrm{A}_{n_0}$. Pour tout $\mathrm{J} \supset \mathrm{J}_0$, on a $\mathrm{J} \in \mathrm{A}_{n_0}$, donc

$$\Big\| v - \sum_{j \in \mathrm{J}} u_j \Big\|^2 = \|v - \mathrm{U_J}\|^2 \le 2^{-n_0+1} < \varepsilon,$$

ce qui montre que v est la somme de la famille sommable (u_i).

Réciproquement, supposons que la famille orthogonale $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ soit sommable de somme v ; si $\varepsilon = 1$ est donné, on peut lui associer J_0 fini tel que $\|v - \mathrm{U}_{\mathrm{J}_1}\| < 1$ pour tout $\mathrm{J}_1 \supset \mathrm{J}_0$. Alors, pour tout J fini, on a en posant $\mathrm{J}_1 = \mathrm{J} \cup \mathrm{J}_0$

$$\sum_{j\in\mathrm{J}} \|v_j\|^2 \le \sum_{j\in\mathrm{J}_1} \|v_j\|^2 = \|\mathrm{U}_{\mathrm{J}_1}\|^2 \le \big(\|v\| + 1\big)^2,$$

ce qui implique que

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} \|v_i\|^2 \le \big(\|v\| + 1\big)^2 < +\infty.$$

Calculons la norme de v. Choisissons pour tout n un élément $\mathrm{J}_n \in \mathrm{A}_n$; on a alors

$$\|v - \mathrm{U}_{\mathrm{J}_n}\|^2 \le 2^{-n+1}, \quad \|\mathrm{U}_{\mathrm{J}_n}\|^2 = \sum_{j\in\mathrm{J}_n} \|u_j\|^2 > \mathrm{S} - 2^{-n},$$

donc $\mathrm{U}_{\mathrm{J}_n}$ tend vers v et

$$\|v\|^2 = \lim_n \|\mathrm{U}_{\mathrm{J}_n}\|^2 = \lim_n \sum_{j\in\mathrm{J}_n} \|u_j\|^2 = \mathrm{S} = \sum_{i\in\mathrm{I}} \|u_i\|^2.$$

Projection orthogonale sur l'espace engendré par un système orthonormé

Lemme 1. *Soit* H *un espace de Hilbert ; si* F *est le sous-espace vectoriel fermé dans* H *engendré par un système orthonormé* $(f_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *et si* x *est un élément de* H, *la famille de vecteurs* $(\langle x, f_i\rangle\, f_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *est sommable dans* H, *et sa somme*

$$y = \sum_{i\in\mathrm{I}} \langle x, f_i\rangle\, f_i$$

est un vecteur de F *tel que* $x - y \perp \mathrm{F}$. *On a*

$$\|x - y\| = d(x, \mathrm{F}),$$

et y *est l'unique vecteur de* F *qui réalise la distance de* x *à* F.

Preuve. — D'après l'inégalité de Bessel, on a

$$\sum_{i \in \mathrm{I}} |\langle x, f_i \rangle|^2 < +\infty,$$

donc la famille $(\langle x, f_i \rangle\, f_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est sommable par la proposition 1 et sa somme $y \in \mathrm{H}$ est bien définie. Pour tout sous-ensemble fini J de I, posons

$$y_{\mathrm{J}} = \sum_{j \in \mathrm{J}} \langle x, f_j \rangle\, f_j \in \mathrm{F}.$$

Montrons que y est dans F : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un J tel que $\|y - y_{\mathrm{J}}\| < \varepsilon$, donc y est dans l'adhérence de F, égale à F puisque F est fermé. Si f_k est l'un des vecteurs du système orthonormé, le produit scalaire $\langle y, f_k \rangle$ est approché, par définition des familles sommables et continuité du produit scalaire, par les produits scalaires $\langle y_{\mathrm{J}}, f_k \rangle$, où J fini est « assez grand », en particulier assez grand pour que $k \in \mathrm{J}$. Alors

$$\langle y_{\mathrm{J}}, f_k \rangle = \sum_{j \in \mathrm{J}} \langle x, f_j \rangle\, \delta_{j,k} = \langle x, f_k \rangle,$$

ce qui prouve que $\langle y, f_k \rangle = \langle x, f_k \rangle$, donc $\langle x - y, f_k \rangle = 0$. Par linéarité et continuité du produit scalaire, on conclut que $x - y \perp \mathrm{F}$. Si z est un élément de y, la relation

$$\|x - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2$$

montre que y réalise la distance, et que y est l'unique point de F qui réalise la distance.

Remarque. En choisissant $z = 0$, on voit que

$$d(x, \mathrm{F})^2 = \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i \in \mathrm{I}} |\langle x, f_i \rangle|^2.$$

Le vecteur x appartient au sous-espace fermé engendré par un système orthonormé *exactement quand l'inégalité de Bessel devient une égalité.*

Existence de base hilbertienne

Théorème. *Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne.*

Preuve. — On utilise l'axiome du choix, sous la forme du lemme de Zorn. On considère l'ensemble $\mathcal{U}$ formé des sous-ensembles orthonormés de H, les ensembles $\mathrm{U} \subset \mathrm{H}$ tels que

tout $u \in \mathrm{U}$ est de norme 1 ;
si $u, v \in \mathrm{U}$ sont distincts, alors $u \perp v$.

Par le lemme de Zorn, on peut trouver un $\mathrm{U}_0 \in \mathcal{U}$ maximal pour l'inclusion.

Si le sous-espace vectoriel V_{U} engendré par un ensemble $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$ n'est pas dense dans H, c'est-à-dire si l'espace vectoriel fermé F_{U} engendré par U n'est pas égal à H, on peut trouver $x \notin \mathrm{F}_{\mathrm{U}}$ puis, d'après le lemme 1, un vecteur $y \in \mathrm{F}_{\mathrm{U}}$ tel que $x - y \perp \mathrm{F}_{\mathrm{U}}$, et nécessairement $x - y \neq 0$; alors

$$v = \frac{x - y}{\|x - y\|}$$

est de norme un, orthogonal à tous les vecteurs de F_{U}, en particulier à tous les vecteurs de U ; on voit que

$$\mathrm{U}_1 = \mathrm{U} \cup \{v\}$$

est un nouvel élément de $\mathcal{U}$, strictement plus grand que U ; si U_0 est maximal, cela est impossible : l'espace vectoriel engendré par U_0 est donc dense dans H, et U_0 est une base hilbertienne (auto-indexée) de H.

Isomorphisme avec l'espace $\ell^2(\mathrm{I})$ *pour un certain ensemble d'indice* I

Soit H un espace de Hilbert ; on peut lui trouver une base hilbertienne (e_i), i variant dans un certain ensemble I. On vérifie que l'application

$$x \in \mathrm{H} \to (\langle x, e_i \rangle)_{i \in \mathrm{I}}$$

est une application linéaire isométrique surjective de H sur l'espace $\ell^2(\mathrm{I})$ formé des familles de carré sommable indexées par I : l'espace H est isomorphe à $\ell^2(\mathrm{I})$.

On peut montrer que toutes les bases hilbertiennes d'un espace de Hilbert donné ont le même cardinal. Par exemple, toutes les bases d'un espace de Hilbert séparable et de dimension infinie ont le cardinal de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

3.2. *Base hilbertienne des exponentielles complexes*

Dans tout ce paragraphe, pour abréger, on désignera par μ la probabilité sur $[0, 2\pi]$ qui est définie par $\mathrm{d}\mu(x) = \mathrm{d}x/(2\pi)$.

Proposition. *La famille des fonctions* $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ *définies par*

$$\forall x \in [0, 2\pi], \quad e_n(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, nx}$$

est une base hilbertienne de l'espace $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}([0, 2\pi], \mu)$ *des fonctions de carré intégrable à valeurs complexes.*

Preuve. — On a vu que les $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont un système orthonormé dans l'espace de Hilbert $\mathrm{H} := \mathrm{L}^2(\mu)$. Il reste à voir que l'espace vectoriel engendré par les e_n, c'est-à-dire l'espace des polynômes trigonométriques, est dense dans H. Si $f \in \mathrm{H}$, on peut, d'après le cours d'intégration, l'approcher par une fonction continue g,

$$\|f - g\|_2 < \varepsilon/2,$$

et on peut supposer que $g(0) = g(2\pi)$ (voir remarque plus bas), ce qui permet de considérer g comme la restriction à $[0, 2\pi]$ d'une fonction périodique continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Weierstrass périodique, on peut trouver un polynôme trigonométrique P tel que $\|g - \mathrm{P}\|_\infty < \varepsilon/2$. Pour finir,

$$\|g - \mathrm{P}\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - \mathrm{P}(x)|^2 \,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} \le \|g - \mathrm{P}\|_\infty^2,$$

donc $\|f - \mathrm{P}\|_2 < \varepsilon$ et la preuve est terminée.

Remarque. Soit g une fonction continue sur $[0, 2\pi]$, et pour tout $n \ge 0$, soit g_n la fonction continue qui est nulle en 0 et 2π, affine sur $[0, 2^{-n}]$ et $[2\pi - 2^{-n}, 2\pi]$ et coïncide avec g sur $[2^{-n}, 2\pi - 2^{-n}]$:

$$g_n(x) = 2^n g(2^{-n}) x \quad \text{si } \ 0 \le x \le 2^{-n},$$
$$g_n(x) = 2^n g(2\pi - 2^{-n})(2\pi - x) \quad \text{si } \ 0 \le 2\pi - x \le 2^{-n}\,;$$

on vérifie facilement que $\|g_n - g\|_2$ tend vers 0. Les fonctions continues sur $[0, 2\pi]$, nulles aux extrémités, sont denses dans $\mathrm{L}^2(\mu)$.

Égalité de Bessel

Pour toute fonction $f \in \mathrm{H} = \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}([0, 2\pi], \mu)$, on a

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

De plus, pour toute famille (c_n) de scalaires de carré sommable, la série

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n$$

converge dans H et sa somme f vérifie $c_n(f) = c_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (on vient d'expliciter un cas particulier d'isomorphisme d'un espace de Hilbert de fonctions avec un espace de suites $\ell^2(\mathrm{I})$: ici H est isomorphe à $\ell^2(\mathbb{Z})$).

Changement de base : cos *et* sin

Commençons par une remarque simple de géométrie euclidienne : si u, v sont orthogonaux de norme un, on trouve une autre base orthonormée de $\mathrm{Vect}(u, v)$ en considérant les deux vecteurs

$$\frac{u + v}{\sqrt{2}}, \quad \frac{u - v}{\sqrt{2}}.$$

Dans la suite des exponentielles complexes e_n, $n \in \mathbb{Z}$, laissons la constante $\mathbf{1} = e_0$ toute seule, mais regroupons e_n et e_{-n} pour $n > 0$,

$$\frac{e_n + e_{-n}}{\sqrt{2}}(x) = \sqrt{2}\cos(nx), \quad \frac{e_n - e_{-n}}{\sqrt{2}}(x) = \mathrm{i}\sqrt{2}\sin(nx).$$

Il est évident qu'on engendre ainsi le même espace (l'espace des polynômes trigonométriques). De plus, quand $k \neq n$, tous les vecteurs de $\mathrm{Vect}(e_n, e_{-n})$ sont orthogonaux à tous les vecteurs de $\mathrm{Vect}(e_k, e_{-k})$: le système formé de la constante $\mathbf{1}$ et des fonctions $\cos(nx)$, $\sin(nx)$, $n \geq 1$, est donc orthogonal. On a prouvé (en gros) le théorème qui suit.

Proposition. *La famille des fonctions*

$$\mathbf{1}, \quad x \to \sqrt{2}\cos(nx), \ x \to \sqrt{2}\sin(nx), \quad n = 1, 2, \ldots$$

est une base hilbertienne de l'espace $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}([0, 2\pi], \mu)$ *des fonctions de carré intégrable à valeurs réelles.*

Calcul des coefficients a_n, $n \geq 0$ *et* b_n, $n \geq 1$

Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mu)$ on pose

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t, \quad n \geq 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t, \quad n \geq 1.$$

Les sommes de Fourier symétriques $(\mathrm{S}_n f)$ d'une fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mu)$ s'expriment par

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = (\mathrm{S}_n f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\big).$$

Théorème de convergence L^2. *Pour toute fonction f de $\mathrm{L}^2(\mu)$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \big\|f - \mathrm{S}_n f\big\|_2 = 0.$$

Preuve. — C'est une simple traduction de la représentation

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e_n$$

comme somme de famille sommable (on pourrait très bien s'en tirer aussi avec des séries ordinaires) : les ensembles finis $\mathrm{L}_n = \{-n, \ldots, n\} \subset \mathbb{Z}$ ont pour réunion $\mathbb{Z}$; si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe $\mathrm{J}_0 \subset \mathbb{Z}$ fini tel que

$$\Big\|f - \sum_{j\in\mathrm{J}} c_j(f) e_j\Big\|_2 < \varepsilon$$

pour tout J fini contenant J_0. Or il existe N_0 tel que J_0 soit contenu dans $\mathrm{L}_{\mathrm{N}_0}$. Il en résulte que pour tout $n \ge \mathrm{N}_0$, L_n contient J_0 et

$$\big\|f - \mathrm{S}_n f\big\|_2 = \Big\|f - \sum_{j\in\mathrm{L}_n} c_j(f) e_j\Big\|_2 < \varepsilon,$$

ce qui prouve la convergence de $\mathrm{S}_n f$ vers f. Notons que réciproquement, l'énoncé implique la densité dans $\mathrm{L}^2(\mu)$ des polynômes trigonométriques, donc le fait que les exponentielles forment une base hilbertienne (compte-tenu de leur évidente orthogonalité).

Théorème de Carleson (1966). *Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mu)$, la série de Fourier*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

converge vers $f(x)$ pour presque tout x.

Ce théorème de Lennart Carleson a des démonstrations très difficiles, hors de notre portée agrégative. Le résultat de convergence presque partout reste vrai pour $\mathrm{L}^p(\mu)$, $p > 1$ (R.A. Hunt, 1968) mais il est faux pour $\mathrm{L}^1(\mu)$ (Kolmogorov avait donné en 1926 un exemple de fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mu)$ dont la série de Fourier diverge en tout point).

Gram-Schmidt

On part d'une suite linéairement indépendante $(v_n)_{0\leqslant n<\mathrm{N}}$ où N est fini ou bien $\mathrm{N} = +\infty$. On construit une suite orthonormée $(f_n)_{0\leqslant n<\mathrm{N}}$ telle que pour tout $n < \mathrm{N}$ on ait

$$\mathrm{Vect}(f_0, \ldots, f_n) = \mathrm{Vect}(v_0, \ldots, v_n).$$

On commence par poser

$$f_0 = \|v_0\|^{-1} v_0$$

ce qui est possible puisque v_0, vecteur d'un système libre, est non nul. Pour n entier tel que $0 \le n < \mathrm{N}$, faisons l'hypothèse de récurrence $\mathrm{H}(n)$ suivante :

$$f_0, f_1, \ldots, f_n \ \text{ sont orthonormés et } \ \mathrm{V}_n := \mathrm{Vect}(v_0, \ldots, v_n) = \mathrm{Vect}(f_0, \ldots, f_n).$$

On voit que $\mathrm{H}(0)$ est vraie. Si $n+1 < \mathrm{N}$, passons de $\mathrm{H}(n)$ à $\mathrm{H}(n+1)$: comme les v_k sont libres, on a $v_{n+1} \notin \mathrm{V}_n$, donc v_{n+1} est distinct de sa projection orthogonale sur V_n ; on pose

$$f_{n+1} = \|v_{n+1} - \mathrm{P}_{\mathrm{V}_n} v_{n+1}\|^{-1} \bigl(v_{n+1} - \mathrm{P}_{\mathrm{V}_n} v_{n+1}\bigr),$$

et on vérifie que l'hypothèse de récurrence se propage au rang $n+1$.

Polynômes orthogonaux

On considère un intervalle I, borné ou non, et une mesure ν de la forme $w(x)\,\mathrm{d}x$ sur I, où $w(x) > 0$. On part de la suite libre $v_n(x) = x^n$, $n \ge 0$, et on lui applique la procédure de Gram-Schmidt pour trouver une suite (P_n) de polynômes orthogonaux, $\deg \mathrm{P}_n = n$, qui engendre l'espace de tous les polynômes. Lorsque les polynômes sont denses dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \nu)$, on obtient ainsi une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \nu)$ formée de polynômes.

Cas d'un intervalle borné : pour $\mathrm{I} = [-1, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue, on trouve les *polynômes de Legendre*. On dispose souvent d'autres méthodes que Gram-Schmidt pour caractériser les polynômes orthogonaux classiques. Par exemple, dans le cas de Legendre, on montre que les polynômes

$$\mathrm{P}_n = \mathrm{D}^n (\mathrm{X}^2 - 1)^n$$

où D désigne l'opérateur de dérivation, sont de degré n pour tout $n \ge 0$, deux à deux orthogonaux sur $[-1, 1]$: ce sont donc des multiples des polynômes obtenus par Gram-Schmidt dans ce cas (ces polynômes (P_n) ne sont ni unitaires, ni normés dans L^2 ; les *vrais* polynômes de Legendre sont souvent normalisés par la condition $\mathrm{L}_n(1) = 1$, qui n'est ni unitaire, ni de norme L^2).

4. Projection sur un convexe

Théorème 1. *On considère un convexe fermé* C *non vide dans un espace de Hilbert* H *et un point* $x \in \mathrm{H}$. *Il existe un point* $y \in \mathrm{C}$, *et un seul, qui réalise la distance de* x *à* C,

$$\|x - y\| = d(x, \mathrm{C}).$$

Preuve. — Posons $d = d(x, \mathrm{C})$; puisque C est non vide, on peut trouver une suite $(y_k) \subset \mathrm{C}$ telle que $\|x - y_k\| \to d$; on aura avec la relation du parallélogramme

$$2\|x - y_k\|^2 + 2\|x - y_\ell\|^2 = \|y_k - y_\ell\|^2 + \|2x - y_k - y_\ell\|^2.$$

Notons que

$$\|2x - y_k - y_\ell\|^2 = 4\|x - (y_k + y_\ell)/2\|^2 \ge 4d^2$$

car $(y_k + y_\ell)/2$ est un point de C, d'après la convexité de C ; donc

$$2\|x - y_k\|^2 + 2\|x - y_\ell\|^2 \ge \|y_k - y_\ell\|^2 + 4d^2$$

ou bien

$$\|y_k - y_\ell\|^2 \le 2\|x - y_k\|^2 + 2\|x - y_\ell\|^2 - 4d^2,$$

et le majorant de droite tend vers $2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0$ quand k, ℓ tendent vers l'infini indépendamment : cela prouve que la suite (y_k) est de Cauchy, donc convergente vers un $y \in \mathrm{H}$ puisque H est complet ; on a $y \in \mathrm{C}$ puisque C est fermé, et

$$\|x - y\| = \lim_k \|x - y_k\| = d.$$

L'unicité se montre en supposant que y_k, y_ℓ soient deux points qui réalisent la distance. La relation du parallélogramme donne alors $\|y_k - y_\ell\| = 0$.

Cas linéaire

Dans le cas où le convexe fermé non vide C est en fait un sous-espace vectoriel fermé F, on peut obtenir la projection orthogonale au moyen de la théorie des bases hilbertiennes : le sous-espace fermé F est complet, donc lui-même un espace de Hilbert. Il existe donc une base hilbertienne $(f_i)_{i\in \mathrm{I}}$ pour F, c'est-à-dire un système orthonormé dans H tel que F soit le sous-espace fermé engendré par ce système. D'après le lemme 1, la projection orthogonale sur F est l'application linéaire

$$\mathrm{P}_\mathrm{F} : x \in \mathrm{H} \rightarrow \sum_{i\in \mathrm{I}} \langle x, f_i\rangle\, f_i \in \mathrm{F},$$

qui est de norme ≤ 1 d'après l'inégalité de Bessel.

Cependant, la méthode la plus habituelle, dans les livres, pour introduire la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé est d'utiliser le théorème 1. On va reprendre la discussion en suivant maintenant cette ligne standardisée.

Lemme. *Si* F *est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert* H *et* x *un vecteur de* H, *le vecteur* $y \in \mathrm{F}$ *réalise la distance de* x à F, *c'est-à-dire que*

$$\|x - y\| = d(x, \mathrm{F}),$$

si et seulement si

$$y \in \mathrm{F}, \quad x - y \perp \mathrm{F}.$$

Preuve. — On a déjà expliqué l'une des directions : si $y \in \mathrm{F}$ vérifie $x - y \perp \mathrm{F}$, on a pour tout $z \in \mathrm{F}$, par Pythagore,

$$\|x - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2,$$

ce qui montre que $\|x - y\| = d(x, \mathrm{F})$. Inversement, soit v un vecteur quelconque de F ; tous les points $y + tv$, $t \in \mathbb{R}$, sont dans F, donc

$$\|x - y\|^2 \le \|x - y - tv\|^2 = \|x - y\|^2 - 2t\,\mathrm{Re}\langle x - y, v\rangle + t^2\|v\|^2,$$

ce qui signifie que cette fonction de t est minimale pour $t = 0$. En annulant sa dérivée en 0, on obtient

$$\mathrm{Re}\langle x - y, v\rangle = 0.$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on en déduit aussitôt que $\langle x - y, v\rangle = 0$; si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le sous-espace F est un $\mathbb{C}$-sous-espace, donc $v_1 = \mathrm{i}v$ est un autre vecteur de F, et en appliquant ce qui précède à v_1 on obtient $\mathrm{Im}\langle x - y, v\rangle = 0$. On a donc bien $\langle x - y, v\rangle = 0$ pour tout vecteur v de F : le vecteur $x - y$ est orthogonal à F.

Projecteur orthogonal P_F

Soit F un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert H ; pour tout $x \in \mathrm{H}$, désignons par $\mathrm{P}_\mathrm{F}x$ le point y de F qui est le plus proche de x ; on déduit du lemme précédent que l'application P_F est linéaire. En effet, si y_1 est l'image de x_1 et y_2 celle de x_2, considérons $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ et $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$; alors y est dans F et on voit facilement que $x - y = \lambda_1(x_1 - y_1) + \lambda_2(x_2 - y_2)$ est orthogonal à F,

$$\forall v \in \mathrm{F}, \quad \langle x - y, v\rangle = \lambda_1\langle x_1 - y_1, v\rangle + \lambda_2\langle x_2 - y_2, v\rangle = 0,$$

donc y est la projection de x et P_F est linéaire.

Si x est déjà dans F, on a $\mathrm{P}_\mathrm{F}x = x$: l'application P_F est un *projecteur*, vérifiant $\mathrm{P}_\mathrm{F}^2 = \mathrm{P}_\mathrm{F}$. De plus, $\|\mathrm{P}_\mathrm{F}x\| \le \|x\|$ pour tout x, avec égalité pour les vecteurs de F : on a toujours $\|\mathrm{P}_\mathrm{F}\| \le 1$, et en fait $\|\mathrm{P}_\mathrm{F}\| = 1$ quand F n'est pas réduit à $\{0\}$.

Dual (topologique) d'un espace de Hilbert

Théorème. *Soit* H *un espace de Hilbert ; pour toute forme linéaire continue* ℓ *sur* H*, il existe un vecteur* $v \in \mathrm{H}$ *(unique) qui* représente *la forme linéaire* ℓ *au sens suivant : pour tout* $x \in \mathrm{H}$,

$$\ell(x) = \langle x, v \rangle.$$

Preuve. — Si $\ell = 0$ on prend $v = 0$; sinon $\mathrm{F} = \ker \ell$ est un sous-espace vectoriel fermé de H, et on peut trouver un vecteur w_0 tel que $\ell(w_0) = 1$. Alors $w = w_0 - \mathrm{P_F} w_0$ est non nul, orthogonal à F, et $\ell(w) = \ell(w_0) = 1$. Pour $x \in \mathrm{H}$ quelconque, écrivons

$$x = (x - \ell(x)w) + \ell(x)w.$$

Le vecteur $z = x - \ell(x)w$ est dans le noyau F, donc $\langle z, w \rangle = 0$ et

$$\langle x, w \rangle = \ell(x) \langle w, w \rangle$$

ce qui montre que

$$\forall x \in \mathrm{H}, \quad \ell(x) = \Big\langle x, \frac{w}{\langle w, w \rangle} \Big\rangle.$$

On a donc représenté la forme linéaire ℓ par le produit scalaire avec le vecteur

$$v = \frac{w}{\langle w, w \rangle}.$$

Critère de totalité

Proposition. *Soit* A *une partie de* H *; pour que l'espace vectoriel engendré par* A *soit dense dans* H*, il faut et il suffit que le vecteur nul* 0_H *soit le seul vecteur de* H *orthogonal à l'ensemble* A.

Preuve. — Soit F le sous-espace vectoriel fermé engendré par A ; c'est l'adhérence de $\mathrm{V} := \mathrm{Vect}\, \mathrm{A}$, le sous-espace engendré par A ; si V n'est pas dense dans H, l'espace F est différent de H. On peut trouver un vecteur x de H qui n'est pas dans F. Alors x n'est pas égal à sa projection orthogonale y sur F. Le vecteur $x - y$ est non nul, et orthogonal à F, donc orthogonal au sous-ensemble A de F.

Inversement, si V est dense et si w est orthogonal à A, alors w est orthogonal à V par la linéarité du produit scalaire, puis orthogonal à $\mathrm{F} = \mathrm{H}$ par continuité. Le vecteur w est orthogonal à lui-même, donc $w = 0$.