cours 10, le 20 janvier 2010

Compacité

Consulter G. Skandalis, *Topologie et Analyse*, H. Queffélec, *Topologie* chap. III, ou encore G. Choquet, *Topologie*.

Topologie métrique, topologie générale

Si (X, d) est un espace métrique, la boule ouverte de centre $x \in \mathrm{X}$ et de rayon $r > 0$ sera notée

$$\mathrm{B}(x, r) = \{y \in \mathrm{X} : d(y, x) < r\}.$$

On notera $\mathrm{B}_d(x, r)$ quand il y aura lieu de distinguer entre plusieurs distances.

Rappel : *ouvert d'un espace métrique*. Un sous-ensemble V de (X, d) est ouvert si pour tout $x \in \mathrm{V}$, il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, r) \subset \mathrm{V}$.

Propriétés des ouverts : une réunion quelconque d'ouverts est ouverte ; une intersection finie d'ouverts est ouverte ; l'espace X et l'ensemble vide sont ouverts.

Il résulte de l'inégalité triangulaire que les boules ouvertes sont ouvertes. Ainsi, un ouvert d'un espace métrique est exactement une réunion (quelconque) de boules ouvertes.

Définition *d'un espace topologique*. C'est le couple d'un ensemble X et d'une famille $\mathcal{O}$ de parties de X, famille stable par union quelconque et intersection finie, contenant X et l'ensemble vide. Cependant, l'usage courant est de parler de « l'espace topologique X », en laissant implicite la famille $\mathcal{O}$. Les ensembles de la famille $\mathcal{O}$ sont appelés *les ouverts* de l'espace topologique X.

Espace séparé : l'espace topologique X est *séparé* si pour tous points $x \neq y$ dans X, il existe des ouverts U et V disjoints, contenant respectivement x et y :

$$x \in \mathrm{U}, \quad y \in \mathrm{V}, \quad \mathrm{U} \cap \mathrm{V} = \emptyset.$$

La topologie d'un espace métrique est toujours séparée : si $x \neq y$, posons $r = d(x, y) > 0$; on prend $\mathrm{U} = \mathrm{B}(x, r/2)$ et $\mathrm{V} = \mathrm{B}(y, r/2)$, deux ouverts disjoints.

Il peut arriver qu'une topologie soit donnée sur un ensemble X, sans qu'aucune distance ne soit indiquée, et qu'on se demande ensuite s'il existe une distance d sur X (distance qui a peu de chances d'être unique) telle que la topologie donnée coïncide avec la topologie associée à cette distance d : on dit alors que la topologie est *métrisable*.

Par exemple, il est assez naturel de définir la topologie de la « droite achevée » $\overline{\mathbb{R}}$ en définissant la famille $\mathcal{O}$ des ouverts de $\overline{\mathbb{R}}$ ainsi : les ouverts de $\overline{\mathbb{R}}$ sont, d'une part, les sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}$, et d'autre part, les ouverts de $\overline{\mathbb{R}}$ contenant $+\infty$ ou $-\infty$, qui sont réunion d'un ouvert de $\mathbb{R}$ avec un ensemble de la forme $(c, +\infty]$ ou bien $[-\infty, c)$, $c \in \mathbb{R}$, (ou les deux). On peut ensuite voir que cette topologie est égale à celle que définit la distance

$$d(x, y) = |\operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}(y)|, \quad x, y \in \overline{\mathbb{R}},$$

où Arctan a été prolongée par continuité à l'infini par les valeurs $\pm\pi/2$; on voit bien qu'il n'y a aucune raison de choisir cette distance plutôt qu'une infinité d'autres qui feraient le même travail. Il est plus raisonnable de dire que $\overline{\mathbb{R}}$ est un espace topologique métrisable, plutôt que de vouloir à tout prix en faire un espace métrique par un choix arbitraire.

Un exemple de topologie non métrisable est donné par la convergence simple, par exemple dans le cas de l'espace X de toutes les fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour chaque fonction $f \in \mathrm{X}$, on va introduire l'analogue d'une boule autour de f : on se donne $\varepsilon > 0$ et un sous-ensemble fini J de $[0,1]$, et on pose

$$\mathrm{B}(f, \mathrm{J}, \varepsilon) = \{g \in \mathrm{X} : \forall t \in \mathrm{J},\ |g(t) - f(t)| < \varepsilon\}.$$

On dit ensuite qu'un sous-ensemble V de X est ouvert pour cette topologie (la topologie de la convergence simple) si pour tout point $f \in \mathrm{V}$, il existe J, ε tels que $\mathrm{B}(f, \mathrm{J}, \varepsilon) \subset \mathrm{V}$.

Cette topologie n'est pas métrisable : sinon, il existerait une distance d telle que tout ouvert V contenant la fonction nulle $\mathbf{0}$ contienne une boule de la forme $\mathrm{B}_d(\mathbf{0}, 2^{-n})$, puis $\mathrm{J}_n, \varepsilon_n$ tels que $\mathrm{B}(\mathbf{0}, \mathrm{J}_n, \varepsilon_n) \subset \mathrm{B}_d(\mathbf{0}, 2^{-n})$. Comme $[0,1]$ n'est pas dénombrable, on peut trouver $j \in [0,1]$ qui n'appartienne à aucun des J_n. On constate que $\mathrm{V} = \mathrm{B}(\mathbf{0}, \{j\}, 1)$ ne contient aucun des $\mathrm{B}(\mathbf{0}, \mathrm{J}_n, \varepsilon_n)$ (on pourrait même trouver facilement, pour chaque n, une fonction g_n *continue* sur $[0,1]$ qui soit dans $\mathrm{B}(\mathbf{0}, \mathrm{J}_n, \varepsilon_n)$ mais pas dans V : il suffit que $g_n(j) = 2$ mais que g_n soit nulle en chaque point de l'ensemble fini J_n).

Exemple introductif à la compacité. Propriété de Borel-Lebesgue

Théorème. *De toute famille* $(\mathrm{U}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *d'ouverts de* $\mathbb{R}$ *qui recouvre* $[0,1]$, *on peut extraire un sous-recouvrement fini de* $[0,1]$.

Preuve. — On considère l'ensemble B des points x de $[0,1]$ tels que $[0,x]$ soit « finiment couvrable », c'est-à-dire qu'il existe $i_1, \ldots, i_n \in \mathrm{I}$ tels que

$$[0,x] \subset \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{U}_{i_j}.$$

Comme 0 est recouvert, il existe un ouvert U_{i_1} qui contient 0, il est alors clair que $0 \in \mathrm{B}$. L'ensemble B est donc non vide, et il est majoré par 1 par définition. Considérons sa borne supérieure $b = \sup \mathrm{B}$. On a $b \in [0,1]$ et si U_{i_0} est un ouvert qui contient b, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que

$$(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \subset \mathrm{U}_{i_0}.$$

Comme b est le plus petit majorant de B, on peut trouver $x \in \mathrm{B}$ tel que $b - \varepsilon < x \le b$. Alors $[0,x]$ est finiment couvert, et $[x, b+\varepsilon) \subset \mathrm{U}_{i_0}$ aussi ; en particulier, on voit que $b \in \mathrm{B}$. Il n'est pas possible que $b < 1$, sinon on pourrait couvrir finiment un intervalle $[0,c]$ avec $c > b$, contredisant la définition de b comme borne supérieure (en prenant c tel que $b < c < \min(1, b+\varepsilon)$) ; donc $1 = b$ appartient à B, ce qui signifie que $[0,1]$ peut être couvert par une famille finie extraite.

Définition : *espace topologique compact.* On dit que l'espace topologique X est *compact* si X est séparé et si de tout recouvrement ouvert $(\mathrm{U}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de X on peut extraire un sous-recouvrement fini : il existe J fini $\subset$ I tel que

$$\mathrm{X} = \bigcup_{j \in \mathrm{J}} \mathrm{U}_j.$$

En travaillant avec des familles de fermés, on voit qu'un espace topologique séparé X est compact si et seulement si la condition suivante est vérifiée : pour toute famille $(\mathrm{F}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de fermés de X telle que toutes les intersections

$$\bigcap_{j\in\mathrm{J}} \mathrm{F}_j, \quad \mathrm{J} \text{ fini } \subset \mathrm{I},$$

soient non vides, l'intersection $\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{F}_i$ de la famille est non vide.

Exemples de compact : d'après Borel-Lebesgue, tout intervalle fermé borné $[a, b]$ de la droite réelle est compact.

Un exemple élémentaire de compact est fourni par une suite convergente et sa limite : si une suite $(x_n) \subset \mathrm{X}$ tend vers une limite y dans l'espace séparé X, le sous-ensemble

$$\mathrm{Y} = \{y\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

est compact.

Remarque : *topologie induite et parties compactes dans un espace topologique.*
Si Y est un sous-ensemble d'un espace topologique X, on munit Y de la topologie *induite*, qui est la topologie dont les ouverts V' sont de la forme $\mathrm{V} \cap \mathrm{Y}$ où V est un ouvert quelconque de X.

Si Y est un ouvert de X, une partie $\mathrm{Z} \subset \mathrm{Y}$ est un *ouvert relatif*, c'est-à-dire un ouvert de Y pour la topologie induite, si et seulement si Z est un ouvert de X.

Les fermés relatifs de Y sont les ensembles de la forme $\mathrm{F} \cap \mathrm{Y}$, où F est un fermé de X. Si Y est fermé dans X, une partie Z de Y est un fermé relatif si et seulement si Z est fermé dans X.

Pour un espace métrique (X, d), la topologie induite sur une partie $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$ est bien la topologie associée à la métrique induite sur Y (restriction à $\mathrm{Y} \times \mathrm{Y}$ de la distance d définie sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$).

Pour montrer la compacité d'une partie Y d'un espace topologique X, munie de la topologie induite, il revient au même de considérer un recouvrement ouvert de Y pour la topologie induite,

$$\mathrm{Y} = \bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{U}'_i$$

et de trouver $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$, J fini tel que $\mathrm{Y} = \bigcup_{j\in\mathrm{J}} \mathrm{U}'_j$, ou bien de raisonner dans X et de considérer que

$$\mathrm{Y} \subset \bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{U}_i \subset \mathrm{X},$$

où les U_i sont des ouverts de X, et de rechercher un sous-ensemble fini $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ tel que $\mathrm{Y} \subset \bigcup_{j\in\mathrm{J}} \mathrm{U}_j$.

Minimisation de fonctions réelles continues ou s.c.i.

Mentionnons un cas particulier d'utilisation de la compacité : si X est compact et s'il existe une suite croissante (U_n) d'ouverts qui couvre X, alors il existe un indice n_0 tel que $\mathrm{U}_{n_0} = \mathrm{X}$; si (F_n) est une suite décroissante de fermés non vides du compact X, l'intersection $\bigcap_n \mathrm{F}_n$ est non vide.

Théorème : minimisation de fonctions continues. *Si f est une fonction réelle continue sur un espace topologique compact* X *non vide, alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Preuve. — On introduit les fermés

$$\mathrm{F}_n = \{f \le m_n\}$$

où $m_n \in \mathbb{R}$ décroît vers l'inf $m \in [-\infty, \infty)$ de la fonction f sur X, avec $m_n > m$ pour tout n. Alors F_n est non vide (à cause de $m_n > m$, et parce que X est supposé non vide), et la suite de ces fermés est décroissante. Si y est un point commun à tous les F_n, on voit que $f(y) = m$. On a $m > -\infty$, puisque m est une valeur de f, donc f est minorée, atteint son minimum au point y. On procède de même pour le max.

Il est clair d'après la preuve que pour pouvoir minimiser une fonction réelle f sur un compact X, il suffit de savoir que tous les ensembles

$$\{f \le c\}, \quad c \in \mathbb{R},$$

sont fermés : c'est la définition des *fonctions semi-continues inférieurement*. Ces fonctions sont « continues vers le bas » : la valeur $f(x)$ étant connue, on peut trouver un voisinage de x dans lequel on est sûr que la valeur de f ne sera pas beaucoup plus petite que $f(x)$; précisément, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert V contenant x tel que

$$y \in \mathrm{V} \Rightarrow f(y) > f(x) - \varepsilon,$$

ce qui revient à dire que l'ensemble $\{f > c\}$ est ouvert.

Propriétés des compacts

Lemme : fermé dans un compact. *Dans un compact* X*, un fermé* F *est compact.*

Preuve. — À un recouvrement du fermé F par une famille d'ouverts de X, ajouter l'ouvert F^c, complémentaire du fermé, pour obtenir un recouvrement de X. Extraire un sous-recouvrement fini, et constater que F^c ne contribue en rien au recouvrement de F. Conclure.

Lemme. *Dans un espace topologique séparé* X*, un compact* K *est fermé.*

Preuve. — On fixe $x \notin \mathrm{K}$; pour chaque $y \in \mathrm{K}$ on trouve des ouverts de X disjoints U_y et V_y contenant x et y. Comme K compact est recouvert par les ouverts V_y, il existe un nombre fini de ces ouverts qui couvrent K, disons $\mathrm{V}_{y_1}, \ldots, \mathrm{V}_{y_n}$. On pose

$$\mathrm{U} = \bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{U}_{y_j}.$$

C'est un ouvert qui contient x et qui est disjoint de K : on a ainsi montré que le complémentaire de K est ouvert.

Remarque 1. On vient de montrer que pour tout point $x \notin \mathrm{K}$, il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $x \in \mathrm{U}$ et $\mathrm{K} \subset \mathrm{V}$. En répétant le raisonnement on obtiendra : si K_0 et K_1 sont deux compacts disjoints d'un espace topologique séparé X, on peut trouver deux ouverts disjoints U_0 et U_1 tels que $\mathrm{K}_j \subset \mathrm{U}_j$, $j = 0, 1$.

Corollaire. *Dans un compact* K, *une partie* A *est compacte si et seulement si elle est fermée.*

Corollaire. *Les compacts de* $\mathbb{R}$ *sont les fermés bornés.*

Preuve. — Si $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}$ est compact, il est fermé puisque $\mathbb{R}$ est séparé, et il est borné car la fonction continue $x \to |x|$ est bornée sur le compact K. Inversement, si F est fermé et borné, on peut l'inclure dans un intervalle $[-a, a]$, et F reste fermé dans le compact $[-a, a]$, donc F est compact.

Remarque 2. D'après la remarque 1 on peut dire que : si X est compact, si F_0 et F_1 sont deux fermés de X disjoints, il existe deux ouverts disjoints U_0 et U_1 tels que $\mathrm{F}_j \subset \mathrm{U}_j$. Cette propriété d'un espace topologique séparé X est la définition des *espaces topologiques normaux.*

Les espaces métriques sont normaux (exercice, qui devient facile après lecture de ce qui suit).

Quand l'espace topologique X est normal, le *lemme d'Urysohn* permet de construire une fonction continue f de X dans $[0, 1]$ égale à j sur F_j, $j = 0, 1$. Cette construction, astucieuse et délicate dans le cas d'un normal abstrait, est facile pour un espace métrique, où la définition de la distance donne déjà une famille riche de fonctions continues. Il suffit de poser dans ce cas

$$f(x) = \frac{d(x, \mathrm{F}_0)}{d(x, \mathrm{F}_0) + d(x, \mathrm{F}_1)}.$$

Image continue dans un séparé

Proposition. *Si f est une application continue d'un espace compact* K *dans un espace séparé* Y, *l'image* $f(\mathrm{K})$ *est compacte.*

Preuve. — Si $f(\mathrm{K})$ est couvert par des ouverts U_i, les ouverts $f^{-1}(\mathrm{U}_i)$ couvrent K, donc sous-recouvrement fini, et toc.

Cas injectif : homéomorphismes. *Si* K *est compact,* Y *séparé et si* $f : \mathrm{K} \to \mathrm{Y}$ *est injective et continue, son inverse, définie de* $f(\mathrm{K})$ *dans* K, *est continue. L'application* f *est donc un homéomorphisme de* K *sur* $f(\mathrm{K})$.

Preuve. — En effet, soit g l'inverse de f, agissant de $f(\mathrm{K})$ dans K. L'image inverse par g d'un fermé $\mathrm{F} \subset \mathrm{K}$ se trouve être l'image directe $f(\mathrm{F})$ du compact F, donc $g^{-1}(\mathrm{F}) = f(\mathrm{F})$ est fermé puisque compact dans un séparé ; il en résulte que g est continue.

Cas particulier : si on affaiblit la topologie d'un compact en la laissant séparée, rien ne change : si $\mathcal{O}_1$ est la famille des ouverts d'un compact K, si $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$ est une deuxième topologie sur K, mais encore séparée, alors $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_1$.

Topologie produit

Si X_1 et X_2 sont deux espaces topologiques, on considère la famille des produits

$$\mathrm{U}_1 \times \mathrm{U}_2 \subset \mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2,$$

où U_j est ouvert dans X_j, $j = 1, 2$, qui va servir de base pour définir la topologie produit. Un sous-ensemble U de $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$ est un ouvert du produit si et seulement si pour tout point $(x_1, x_2) \in \mathrm{U}$, il existe U_j ouvert dans X_j, $j = 1, 2$, tels que $(x_1, x_2) \in \mathrm{U}_1 \times \mathrm{U}_2 \subset \mathrm{U}$. Plus généralement, on définit la topologie d'un produit fini d'espaces topologiques.

Définition. Un sous-ensemble U d'un produit fini $\mathrm{X}_1 \times \ldots \times \mathrm{X}_n$ d'espaces topologiques est un ouvert de la topologie produit si et seulement si pour tout point $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{U}$, il existe U_j ouvert dans X_j, $j = 1, \ldots, n$, tels que

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{U}_1 \times \ldots \times \mathrm{U}_n \subset \mathrm{U}.$$

On vérifie facilement que le produit de trois espaces $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2 \times \mathrm{X}_3$ a la même topologie que le produit $(\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2) \times \mathrm{X}_3$.

Remarque. La topologie produit sur un produit fini d'espaces métriques (X_j, d_j), où $j = 1, \ldots, n$, est certainement métrisable, mais il n'y a pas de distance privilégiée. La topologie produit peut être définie par exemple par l'une ou l'autre des distances

$$d_1(x, y) = \sum_{j=1}^{n} d_j(x_j, y_j)\,; \quad d_\infty(x, y) = \max_{j=1,\ldots,n} d_j(x_j, y_j),$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ sont deux points quelconques du produit $\prod_{j=1}^{n} \mathrm{X}_j$.

Théorème. *Le produit d'un nombre fini de compacts est compact.*

Preuve. — Il suffit de traiter le cas d'un produit de deux compacts K et L. On donne un recouvrement ouvert (U_i) de $\mathrm{K} \times \mathrm{L}$. Fixons x dans K et considérons la famille $\mathcal{F}$ des ouverts W de L vérifiant la propriété suivante : il existe un ouvert V de K, contenant x, et un ouvert U_i du recouvrement tels que

$$\mathrm{V} \times \mathrm{W} \subset \mathrm{U}_i.$$

Cette famille $\mathcal{F}$ d'ouverts recouvre le compact L (pour tout $y \in \mathrm{L}$, il existe un ouvert U_i et un produit $\mathrm{V} \times \mathrm{W}$ tels que $(x, y) \in \mathrm{V} \times \mathrm{W} \subset \mathrm{U}_i$, donc $y \in \mathrm{W} \in \mathcal{F}$). Il existe donc un nombre fini d'ensembles $\mathrm{W}_1, \ldots, \mathrm{W}_n$ qui recouvre L : on a pour $j = 1, \ldots, n$

$$\mathrm{V}_j \times \mathrm{W}_j \subset \mathrm{U}_{i_j}$$

où V_j contient x et où les W_j couvrent L. Posons

$$\mathrm{V} = \bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{V}_j\,;$$

c'est un ouvert de K tel que $\mathrm{V} \times \mathrm{L}$ soit couvert par un nombre fini d'ouverts de la famille (U_i). On peut couvrir K par un nombre fini de tels ouverts V, et ça marche.

Proposition. *Les compacts de $\mathbb{R}^d$ sont les sous-ensembles fermés bornés.*

Preuve. — Comme pour $\mathbb{R}$, maintenant qu'on sait que $[-a, a]^d$ est compact.

Valeur d'adhérence d'une suite

On dit que $y \in \mathrm{X}$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n) \subset \mathrm{X}$ si pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout ouvert V contenant y, il existe $n \geq m$ tel que $x_n \in \mathrm{V}$.

Dans le cas où l'ensemble d'indices est $\mathbb{N}$, il revient au même de dire que pour tout voisinage V de y, il y a une infinité d'indices n tels que $x_n \in \mathrm{V}$.

Proposition. *Toute suite dans un compact* X *admet des valeurs d'adhérence.*

Preuve. — Par l'absurde : s'il n'y a aucune valeur d'adhérence, chaque point $x \in \mathrm{X}$ a un voisinage ouvert U_x qui ne reçoit qu'un nombre fini d'indices de la suite. L'existence d'un recouvrement fini de X par de tels ouverts $\mathrm{U}_{x_1}, \ldots, \mathrm{U}_{x_k}$ implique que la suite n'aurait qu'un nombre fini d'indices, contradiction.

Corollaire : propriété de Bolzano-Weierstrass. *Si* (X, d) *est un espace* métrique *compact, toute suite* $(x_n) \subset \mathrm{X}$ *admet des sous-suites convergentes.*

Preuve. — Étant donnée une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de points du compact X, il existe une valeur d'adhérence $y \in \mathrm{X}$. On construit par récurrence une suite strictement croissante d'entiers n_k telle que $d(x_{n_k}, y) \leq 2^{-k}$: pour tout k, il existe une infinité N_k d'indices n tels que $d(x_n, y) < 2^{-k}$; on peut prendre pour n_k le plus petit élément de N_k qui dépasse les éléments déjà sélectionnés, $n_0 < n_1 < \ldots < n_{k-1}$.