cours 1, le 21 octobre 2009

Séries de Fourier

Références : Chatterji vol 3 ; Queffélec et Zuily, chap. IV ; Rudin ARC.

Fonctions périodiques

On va se concentrer pour l'instant sur les fonctions 2π-périodiques : fonctions f à valeurs complexes, définies sur $\mathbb{R}$ et telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t+2\pi) = f(t).$$

On aura parfois à considérer une fonction g définie sur un intervalle (semi-ouvert) de longueur 2π, par exemple $g : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$, et à lui associer l'unique fonction 2π-périodique f telle que $f = g$ sur $[0, 2\pi)$. Soit

$$\mathrm{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

le cercle unité du plan complexe ; si F est une fonction définie sur U, on lui associera la fonction 2π-périodique f définie par $f(\theta) = \mathrm{F}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Si une fonction 2π-périodique f est localement intégrable sur $\mathbb{R}$, ce qui revient à dire qu'elle est intégrable sur tout intervalle de longueur 2π, on notera que l'intégrale sur une période

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$$

ne dépend pas de l'origine choisie $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(u)\,\mathrm{d}u$$

(en effet, il existe un unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2k\pi < a \le 2k\pi + 2\pi$; on découpe le segment $[a, a+2\pi]$ en $[a, 2k\pi + 2\pi]$ et $[2k\pi + 2\pi, a + 2\pi]$: les deux intégrales correspondantes se ramènent par changement de variable et 2π-périodicité à $[a - 2k\pi, 2\pi]$ et $[0, a - 2k\pi]$, qu'on recolle en $[0, 2\pi]$).

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on définit la fonction e_k par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e_k(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}.$$

On voit que e_k est 2π-périodique de classe C^∞, de module 1. On a

$$\int_0^{2\pi} e_0(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = 1$$

et pour tout $k \ne 0$,

$$\int_0^{2\pi} e_k(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \Big[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}}{2\pi\mathrm{i}k}\Big]_0^{2\pi} = 0,$$

puisque e_k est 2π-périodique. On peut exprimer le résultat en introduisant le *symbole de Kronecker* $\delta_{i,j}$, égal à 1 quand $i = j$ et à 0 quand $i \neq j$:

$$\int_0^{2\pi} e_k(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \delta_{k,0}.$$

Un *polynôme trigonométrique* est une combinaison linéaire P des fonctions e_k,

$$\mathrm{P} = \sum_{k=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} \lambda_k e_k,$$

où N est un entier ≥ 0 quelconque, et les (λ_k) des coefficients complexes arbitraires.

Si f est 2π-périodique localement intégrable, on définit ses coefficients de Fourier (complexes) $c_n(f)$, pour $n \in \mathbb{Z}$, par la formule

$$c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}.$$

La série de Fourier d'une telle fonction f est

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e_n,$$

expression qui peut être considérée de multiples points de vue (convergence ponctuelle, convergence uniforme, convergence dans L^p, etc.), et que nous laissons pour l'instant dans le vague.

Un exemple important de polynôme trigonométrique

On prend $m \leq n$ et on pose

$$\mathrm{E}_{m,n} = \sum_{k=m}^{n} e_k.$$

Notons que pour tout nombre complexe a, on a

$$(a-1)(a^m + a^{m+1} + \cdots + a^n) = a^{n+1} - a^m.$$

On a donc en appliquant à $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$

$$\text{(1)} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{E}_{m,n}(t) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - 1} \qquad \Big(\text{ou bien } \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-1)t}}{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}\Big).$$

Si $m \leq 0 \leq n$, on voit que

$$\text{(2)} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{E}_{m,n}(s)\,\frac{\mathrm{d}s}{2\pi} = \sum_{k=m}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ks}\,\frac{\mathrm{d}s}{2\pi} = \sum_{k=m}^{n} \delta_{k,0} = 1.$$

Riemann-Lebesgue

Si g est dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on définit la *transformée de Fourier* $\widehat{g}$ de g en posant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{g}(t) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\, \mathrm{d}x.$$

Cette fonction $\widehat{g}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (théorie de Lebesgue des intégrales dépendant d'un paramètre), et bornée,

$$(3) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad |\widehat{g}(t)| \le \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, |\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\,|\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, \mathrm{d}x = \|g\|_1 := \|g\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}.$$

Proposition : Riemann-Lebesgue. *Si g est intégrable sur $\mathbb{R}$, la transformée de Fourier $\widehat{g}$ tend vers 0 à l'infini.*

Preuve. — Si $h = \mathbf{1}_{[a,b]}$, on a pour $t \ne 0$

$$\widehat{h}(t) = \int_a^b \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bt} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}at}}{-\mathrm{i}t}, \qquad |\widehat{h}(t)| \le \frac{2}{|t|},$$

qui tend vers 0 à l'infini comme t^{-1}. Si h est une fonction en escalier, de la forme

$$h = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \lambda_j \mathbf{1}_{[a_j,b_j]},$$

on voit par la linéarité de la transformation de Fourier que

$$\widehat{h}(t) = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \lambda_j \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b_j t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a_j t}}{-\mathrm{i}t}, \qquad |\widehat{h}(t)| \le \Bigl(\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} |\lambda_j|\Bigr) \frac{2}{|t|},$$

donc $\widehat{h}$ tend vers 0 à l'infini.

Soit $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$; donnons nous $\varepsilon > 0$. D'après le cours d'Intégration, les fonctions en escalier sont denses dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$: on peut trouver h en escalier telle que $\|h - g\|_1 < \varepsilon/2$. Alors, d'après la majoration (3), on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\widehat{h}(t) - \widehat{g}(t)| = |(\widehat{h - g})(t)| \le \|h - g\|_1 < \varepsilon/2.$$

Mais puisque $\widehat{h}$ tend vers 0 à l'infini, on peut trouver t_0 tel que

$$|t| \ge t_0 \Rightarrow |\widehat{h}(t)| < \varepsilon/2.$$

Pour $|t| \ge t_0$, on a donc

$$|\widehat{g}(t)| \le |\widehat{g}(t) - \widehat{h}(t)| + |\widehat{h}(t)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

ce qui prouve le résultat.

Conséquence : si f est 2π-périodique localement intégrable, $c_n(f)$ tend vers 0 quand $|n|$ tend vers $+\infty$. En effet, considérons la fonction intégrable

$$g = \mathbf{1}_{[0,2\pi]} \frac{f}{2\pi} \ ;$$

on voit que

$$\widehat{g}(n) = \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = c_n(f),$$

qui tend donc vers 0 quand $|n| \to \infty$.

Les coefficients $c_n(f)$ sont bornés, puisqu'ils tendent vers 0, mais on a une borne explicite évidente analogue à celle de l'équation (3),

$$|c_n(f)| \le \int_0^{2\pi} |f(x)| \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mu)}$$

où μ désigne la mesure de probabilité $\mathbf{1}_{[0,2\pi]}(x)\,\mathrm{d}x/(2\pi)$.

Dans le cas d'une fonction f périodique de classe C^1, on va prouver explicitement, par intégration par parties, que $c_n(f)$ tend vers 0. La fonction $g(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}$ est 2π-périodique et de classe C^1, donc

$$0 = g(2\pi) - g(0) = \int_0^{2\pi} g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \bigl(f'(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} - \mathrm{i}nf(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\bigr)\,\mathrm{d}x,$$

ce qui donne

$$c_n(f') = \mathrm{i}nc_n(f).$$

On a par conséquent

$$|c_n(f)| \le \frac{\|f'\|_{\mathrm{L}^1(\mu)}}{|n|}$$

pour tout entier $n \ne 0$. Si f est de classe C^2, on a

$$c_n(f'') = -n^2 c_n(f), \quad n^2|c_n(f)| \le \|f''\|_{\mathrm{L}^1(\mu)}. \tag{4}$$

Les coefficients de Fourier sont donc absolument sommables dans le cas d'une fonction f de classe C^2. On verra plus tard que ce résultat n'est pas optimal : la classe C^1 suffit (et en exercice, on pourra même voir qu'une condition de Hölder $\alpha > 1/2$ suffit aussi).

Premier théorème de convergence

Théorème 1. *Si f est mesurable 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, si x_0 est donné dans $\mathbb{R}$ et si*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bigl|f(x_0 - t) - \ell\bigr|}{|t|}\,\mathrm{d}t < \infty,$$

alors la série de Fourier de f converge (bilatéralement) au point x_0 et sa somme est ℓ :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx_0} = \ell.$$

Preuve. — On prend $m \le 0 \le n$ quelconques, et on calcule

$$\sum_{k=m}^{n} c_k(f) e_k(x_0) = \sum_{k=m}^{n} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ks} f(s) \,\frac{\mathrm{d}s}{2\pi} \Big) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_0} = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{k=m}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_0-s)} \Big) f(s) \,\frac{\mathrm{d}s}{2\pi}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{E}_{m,n}(x_0 - s) f(s) \,\frac{\mathrm{d}s}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{E}_{m,n}(t) f(x_0 - t) \,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \cdot$$

Comme $m \le 0 \le n$, la fonction $\mathrm{E}_{m,n}$ est d'intégrale 1 par rapport à la probabilité μ d'après l'équation (2), donc

$$\ell = \ell \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{E}_{m,n}(t) \,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \ ;$$

il en résulte que

$$\sum_{k=m}^{n} c_k(f) e_k(x_0) - \ell = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{E}_{m,n}(t) \big(f(x_0 - t) - \ell \big) \,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \cdot$$

On introduit la fonction 2π-périodique g définie par

$$g(t) = \frac{f(x_0 - t) - \ell}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - 1}$$

si $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, et (si on veut) $g(2\pi k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. L'hypothèse du théorème implique que g est intégrable sur $[-\pi, \pi]$ (voir plus loin). Alors, d'après l'équation (1), on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{E}_{m,n}(t) \big(f(x_0 - t) - \ell \big) \,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}mt} \big) \,\frac{f(x_0 - t) - \ell}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - 1} \,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \big(e_{n+1}(t) - e_m(t) \big) \, g(t) \,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = c_{-n-1}(g) - c_{-m}(g),$$

qui tend vers 0 par Riemann-Lebesgue, quand m, n tendent vers $-\infty$ et $+\infty$ indépendamment. On a donc

$$\sum_{k=m}^{n} c_k(f) e_k(x_0) - \ell = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{E}_{m,n}(t) \big(f(x_0 - t) - \ell \big) \,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = c_{-n-1}(g) - c_{-m}(g) \to 0$$

quand m, n tendent vers $-\infty$ et $+\infty$. La preuve du théorème sera achevée quand on aura vérifié que g est intégrable sur $[-\pi, \pi]$.

On a quand $|t| \le \pi$, par concavité du sinus sur $[0, \pi/2]$

$$|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - 1| = |\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t/2}\,| = 2|\sin(t/2)| \ge 2|t|/\pi,$$

donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)| \,\mathrm{d}t \le \frac{\pi}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \big| f(x_0 - t) - \ell \big| \,\frac{\mathrm{d}t}{|t|}$$

qui est fini d'après l'hypothèse du théorème.

Exemple. Posons $f(x) = \pi - x$ sur $(0, 2\pi)$, prolongée par périodicité. En tout point x différent de 0 mod 2π, la série de Fourier de f converge vers $f(x)$. En effet, si $0 < x_0 < 2\pi$, on voit que $|f(x_0 - t) - f(x_0)| = |t|$ quand t est assez petit, donc l'intégrale de l'hypothèse du théorème 1 converge.

Exercice. Déterminer les coefficients de cette série de Fourier.

Remarque. Le ressort de la convergence vers $f(x)$ pour l'exemple précédent est le suivant : si f localement intégrable et 2π-périodique est dérivable au point x_0, alors $f(x_0)$ est la somme de la série de Fourier de f au point x_0.

Conséquences.

1. Les fonctions 2π-périodiques et lipschitziennes (ou plus généralement vérifiant une *condition de Hölder* d'ordre $\alpha > 0$) sont égales en tout point à la somme de leur série de Fourier. Une fonction est α-hölderienne s'il existe une constante M telle que

$$|f(y) - f(x)| \le \mathrm{M}|y-x|^\alpha$$

pour tous x, y. Dans cette définition, on suppose $0 < \alpha \le 1$ (exercice : quand $\alpha > 1$, seules les fonctions constantes peuvent vérifier cette propriété sur un intervalle). Le cas $\alpha = 1$ est le cas lipschitzien.

Vérifions l'affirmation précédente en appliquant le critère du théorème 1 : si f est α-hölderienne, avec $\alpha > 0$, on aura pour tout x_0

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(x_0 - t) - \ell|}{|t|}\,\mathrm{d}t \le \mathrm{M} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|t|^\alpha}{|t|}\,\mathrm{d}t = 2\mathrm{M} \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-\alpha}} < \infty.$$

2. Si f est 2π-périodique de classe C^2, sa série de Fourier converge uniformément vers f.

En effet, la fonction f est de classe C^1 et périodique, donc f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et f est lipschitzienne, ce qui implique que

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

pour tout x, d'après la remarque précédente. D'autre part, les coefficients $c_n(f)$ sont absolument sommables, puisqu'ils sont $\mathrm{O}(n^{-2})$ d'après l'équation (4) ; pour tout $\varepsilon > 0$, on peut donc trouver N tel que

$$\sum_{|k|>\mathrm{N}} |c_k(f)| < \varepsilon.$$

Si on choisit $m \le -\mathrm{N}$ et $n \ge \mathrm{N}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\Bigl|f(x) - \sum_{k=m}^{n} c_k(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\Bigr| = \Bigl|\sum_{k<m \text{ ou } k>n} c_k(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\Bigr| \le \sum_{|k|>\mathrm{N}} |c_k(f)| < \varepsilon,$$

ce qui montre la convergence uniforme vers f des sommes partielles $\sum_{k=m}^{n} c_k(f) e_k$, quand m, n tendent vers $-\infty$ et $+\infty$ indépendamment.

Approximation par convolution : première couche

Si ψ est continue à support compact et f mesurable bornée sur $\mathbb{R}$ posons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * \psi)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\psi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(u)\psi(x-u)\,\mathrm{d}u.$$

Sous la deuxième forme on peut voir que $f * \psi$ est continue : l'application d'un théorème à la Lebesgue n'est pas vraiment difficile, mais demande un peu de soin. Comme ψ est continue à support compact, elle admet une majoration de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\psi(t)| \le \mathrm{M}_\psi\, \mathbf{1}_{[-a,a]}(t)$$

pour un $a > 0$ choisi assez grand pour que le support de ψ soit contenu dans $[-a, a]$, et en ayant choisi $\mathrm{M}_\psi \ge \|\psi\|_\infty$.

Pour prouver la continuité en un point x_0 donné, on peut limiter l'étude aux x qui vérifient, par exemple, $|x - x_0| < 1$. Pour de tels x, on aura puisque f est bornée, disons par M_f

$$|f(u)\psi(x-u)| \le \mathrm{M}_f \mathrm{M}_\psi \mathbf{1}_{[-a,a]}(x-u) \le \mathrm{M}_f \mathrm{M}_\psi \mathbf{1}_{[-a+x_0-1,a+x_0+1]}(u),$$

et cette dernière fonction

$$u \to \mathrm{M}_f \mathrm{M}_\psi \mathbf{1}_{[-a+x_0-1,a+x_0+1]}(u)$$

donne un majorant intégrable en u, indépendant de la valeur du paramètre x dans le segment $[x_0 - 1, x_0 + 1]$, pour la fonction $u \to f(u)\psi(x-u)$ sous l'intégrale. Comme

$$x \to f(u)\psi(x-u)$$

est continue pour tout u, il en résulte (par l'application du théorème de convergence dominée) que $f * \psi$ est continue au point x_0, par ailleurs quelconque.

Si de plus ψ est de classe C^1, on voit par le même argument, appliqué à la fonction continue à support compact ψ' en vue de la majoration demandée pour l'application du théorème de dérivation sous l'intégrale, que

$$(f * \psi)' = f * \psi'$$

et par ce qui précède, $f * \psi$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Si ψ est de classe C^2, on voit de même que $f * \psi$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, et

$$(f * \psi)'' = f * \psi''. \tag{5}$$

Module de continuité

Si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, on définit son *module de continuité* ω_f en posant pour tout $h > 0$

$$\omega_f(h) = \sup\{|f(y) - f(x)| : |y - x| < h\}.$$

Le module est croissant et sous-additif, $\omega_f(h_1 + h_2) \le \omega_f(h_1) + \omega_f(h_2)$, pour tous $h_1, h_2 > 0$. Dire que f est uniformément continue équivaut à dire que

$$\lim_{h \to 0} \omega_f(h) = 0.$$

Si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, la convolée $f * \psi$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, et de plus le module de continuité de $f * \psi$ se majore facilement par un multiple de celui de f : pour tout k réel tel que $|k| < h$, on a

$$\bigl|(f * \psi)(x+k) - (f * \psi)(x)\bigr| = \Bigl|\int_{\mathbb{R}} \bigl(f(x+k-t) - f(x-t)\bigr)\psi(t)\,\mathrm{d}t\Bigr|$$

$$\le \int_{\mathbb{R}} \omega_f(|h|)\,|\psi(t)|\,\mathrm{d}t = \omega_f(|h|)\,\|\psi\|_1,$$

donc

$$\omega_{f*\psi} \le \|\psi\|_1\,\omega_f. \tag{6}$$

Si f est 2π-périodique, la convolée $f * \psi$ est également 2π-périodique :

$$(f * \psi)(x + 2\pi) = \int_{\mathbb{R}} f(x + 2\pi - t)\psi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\psi(t)\,\mathrm{d}t = (f * \psi)(x).$$

Un premier résultat d'approximation par convolution

On considère la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \frac{35}{32}(1-x^2)^3 \quad \text{si} \quad |x| \le 1, \quad \text{et} \quad \varphi(x) = 0 \quad \text{sinon},$$

où la constante $c = 35/32$ est choisie pour que l'intégrale de φ sur $\mathbb{R}$ soit égale à 1. Alors φ est de classe C^2 à support compact. On pose $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$. C'est encore une fonction ≥ 0 de classe C^2 à support compact : le support de φ_n est égal à $[-1/n, 1/n]$. L'intégrale de φ_n est égale à 1 pour tout n,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \varphi(nt)\,n\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \varphi(u)\,\mathrm{d}u = 1.$$

Lemme. *Si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $f * \varphi_n$ est de classe C^2 et converge uniformément vers f quand n tend vers l'infini.*

Preuve. — Pour tout entier $n \ge 1$, la fonction $f*\varphi_n$ est de classe C^2 d'après la discussion générale menée avant l'équation (5). On a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\bigl|(f*\varphi_n)(x) - f(x)\bigr| = \Bigl|\int_{\mathbb{R}} \bigl(f(x-t) - f(x)\bigr)\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t\Bigr|$$

$$\le \int_{-1/n}^{1/n} \bigl|f(x-t) - f(x)\bigr|\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \le \omega_f(1/n) \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(u)\,\mathrm{d}u = \omega_f(1/n)$$

qui tend vers 0 (uniformément en x).

On a vu à l'équation (6) que

$$\omega_{f*\varphi_n}(h) \le \omega_f(h) \int_{\mathbb{R}} |\varphi_n(t)|\,\mathrm{d}t = \omega_f(h) \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \omega_f(h),$$

ce qui montre que la convolée reste uniformément continue. Remarquons que comme φ est à support compact, on n'a pas besoin de supposer que f soit bornée dans le résultat précédent : la validité de l'opération de convolution admet des conditions très variées qu'il est impossible de placer dans un schéma unique et simple.

Remarque. Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, elle est uniformément continue. Pour le voir, on peut utiliser le fait que f est uniformément continue sur le compact $[0, 4\pi]$, et remarquer que pour tous points $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|y-x| < \delta < 2\pi$, on peut trouver deux points x_1, y_1 dans $[0, 4\pi]$ tels que $x - x_1 = y - y_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$. On peut aussi reprendre une des preuves usuelles du théorème de Heine, par contradiction : si f n'est pas uniformément continue, on peut trouver $\varepsilon > 0$ et deux suites (x_n, y_n) telles que $y_n - x_n$ tende vers 0 mais $|f(y_n) - f(x_n)| \ge \varepsilon$; on remarque qu'on peut supposer, par la périodicité de f, que x_n est dans $[0, 2\pi]$. On peut alors extraire une sous-suite (x_{n_k}) convergente vers un certain z, noter que y_{n_k} converge aussi vers z. Par la continuité de f au point z, la suite $f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})$ tend vers $f(z) - f(z) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse.

Corollaire : théorème de Weierstrass périodique. *Si f est continue 2π-périodique, on peut l'approcher uniformément sur $\mathbb{R}$ par des polynômes trigonométriques.*

Preuve. — Soit f continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$; alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ d'après la remarque précédente. Soit $\varepsilon > 0$ donné ; par le lemme précédent, on peut trouver une fonction périodique de classe C^2, de la forme $g = f * \varphi_n$ (pour n assez grand) telle que $\|g - f\|_\infty < \varepsilon/2$.

On a vu (conséquence **2** du théorème 1) que la série de Fourier de la fonction g de classe C^2 converge uniformément vers g ; il existe donc un entier N tel qu'en posant

$$\mathrm{P} = \sum_{k=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} c_k(g) e_k,$$

on ait $\|g - \mathrm{P}\|_\infty < \varepsilon/2$. Il en résulte que le polynôme trigonométrique P vérifie l'inégalité $\|\mathrm{P} - f\|_\infty < \varepsilon$, et le théorème est démontré.

Sommes symétriques. Théorème de Dirichlet

Le *noyau de Dirichlet* D_n est le cas symétrique des sommes $\mathrm{E}_{m,n}$ qu'on a utilisées dans la preuve du théorème 1,

$$\mathrm{D}_n(t) = \mathrm{E}_{-n,n}(t) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - 1} = \frac{\sin\big[(n+1/2)t\big]}{\sin(t/2)}.$$

On remarque que D_n est pair, d'intégrale 1.

On définit les sommes de Fourier $\mathrm{S}_n f$ d'une fonction 2π-périodique f localement intégrable en considérant les sommes symétriques,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\mathrm{S}_n f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \mathrm{D}_n(t) \,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}.$$

Théorème : Dirichlet-Dini. *Si f est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, localement intégrable et si*

$$\int_0^{\pi} \Big| \frac{f(x_0 - t) + f(x_0 + t)}{2} - \ell \Big| \,\frac{\mathrm{d}t}{t} < \infty,$$

alors $(\mathrm{S}_n f)(x_0)$ converge vers ℓ quand n tend vers l'infini.

Preuve. — Posons

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \frac{f(x_0 - t) + f(x_0 + t)}{2}.$$

Alors

$$2c_k(g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x_0 - u)}\,\frac{\mathrm{d}u}{2\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(v)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(v - x_0)}\,\frac{\mathrm{d}v}{2\pi} = c_{-k}(f)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_0} + c_k(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_0},$$

donc

$$2(\mathrm{S}_n g)(0) = 2\sum_{k=-n}^{n} c_k(g) = \sum_{k=-n}^{n} \big(c_{-k}(f)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_0} + c_k(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_0}\big) = 2(\mathrm{S}_n f)(x_0).$$

La fonction g vérifie au point 0 et avec la valeur limite ℓ les hypothèses du théorème 1 de convergence ponctuelle, et par conséquent

$$(\mathrm{S}_n f)(x_0) = (\mathrm{S}_n g)(0) \to \ell.$$

On dira qu'une fonction 2π-périodique f est de *classe* C^1 *par morceaux* si on peut découper $[0, 2\pi]$ au moyen d'un nombre fini de points, $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_\mathrm{N} = 2\pi$, de façon que la restriction de f à chaque intervalle ouvert (a_j, a_{j+1}), $j = 0, \ldots, \mathrm{N}-1$, puisse se prolonger en fonction de classe C^1 sur l'intervalle fermé $[a_j, a_{j+1}]$. Il en résulte en particulier que la fonction f admet en tout point x des limites à gauche et à droite, qu'on notera $f(x-0)$ et $f(x+0)$. De plus, si on fixe x_0, par exemple égal à l'un des points de subdivision a_j, $j < \mathrm{N}$, et puisque la fonction prolongée $\tilde{f}_j$ à l'intervalle fermé $[a_j, a_{j+1}]$ admet une dérivée à droite $(\tilde{f}_j)'_d(x_0)$, on aura pour $t > 0$ assez petit

$$\bigl|f(x_0+t) - f(x_0+0)\bigr| \le \bigl(|(\tilde{f}_j)'_d(x_0)| + 1\bigr)\, t$$

et de même à gauche, ce qui montre qu'il existe M tel que pour $t > 0$ assez petit, on ait

$$\Bigl|\frac{f(x_0-t)+f(x_0+t)}{2} - \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}\Bigr| \le \mathrm{M}t.$$

L'intégrale de l'hypothèse du théorème de Dirichlet-Dini est donc convergente. On retrouve ainsi, en corollaire, l'énoncé classique du théorème de Dirichlet.

Corollaire : théorème de Dirichlet. *Si f est 2π-périodique et de classe* C^1 *par morceaux, on a pour tout x*

$$(\mathrm{S}_n f)(x) \to \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

quand $n \to +\infty$.