Espace $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$

On note $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues entre deux espaces normés E et F ; si T est continue de E dans F, l'image de la boule unité de E est bornée dans F, ce qui permet de définir la norme $\|\mathrm{T}\|$ de l'application linéaire T par la formule

$$\|\mathrm{T}\| = \sup\{\|\mathrm{T}x\|_\mathrm{F} : x \in \mathrm{E}, \|x\|_\mathrm{E} \le 1\}.$$

Cette quantité est bien une norme sur l'espace $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, et $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est complet pour cette norme si F est complet.

Le plus souvent, on exploite la définition de la norme d'une application linéaire T en écrivant la majoration

$$\|\mathrm{T}x\|_\mathrm{F} \le \|\mathrm{T}\|\,\|x\|_\mathrm{E}$$

pour tout vecteur $x \in \mathrm{E}$. On peut d'ailleurs définir $\|\mathrm{T}\|$ comme la plus petite constante C telle que l'inégalité $\|\mathrm{T}x\|_\mathrm{F} \le \mathrm{C}\,\|x\|_\mathrm{E}$ soit vraie pour tout $x \in \mathrm{E}$; à partir de là il est clair que

$$\|\mathrm{T} \circ \mathrm{S}\| \le \|\mathrm{T}\|\,\|\mathrm{S}\|$$

chaque fois que les applications linéaires continues S et T sont composables ; en particulier, on obtient une norme d'algèbre de Banach sur $\mathcal{L}(\mathrm{E})$, quand E est un espace de Banach.

Dual topologique

Le dual topologique (ou simplement dual, quand le contexte est clair) de l'espace normé E est l'espace $\mathrm{E}' = \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathbb{K})$ des formes linéaires continues sur E ; il est complet puisque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est complet.

Dans le cas d'un espace de Hilbert H sur $\mathbb{K}$, on dispose d'une application $i : \mathrm{H} \to \mathrm{H}'$ de l'espace H dans son dual H', qui associe à chaque vecteur $v \in \mathrm{H}$ la forme linéaire continue $i(v)$ définie par

$$i(v) : x \in \mathrm{H} \to \langle x, v\rangle \in \mathbb{K}.$$

Noter que dans le cas complexe, cette application i *n'est pas linéaire* de H dans H', mais antilinéaire : on a

$$i(\lambda v) = \overline{\lambda} i(v), \quad i(v_1 + v_2) = i(v_1) + i(v_2)$$

pour tous $v, v_1, v_2 \in \mathrm{H}$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$. L'application i est isométrique : en effet, on a par Cauchy-Schwarz $|i(v)(x)| \le \|v\|\,\|x\|$ pour tout x, donc $\|i(v)\| \le \|v\|$ et en appliquant la forme linéaire $i(v)$ au vecteur v lui-même,

$$\|v\|^2 = i(v)(v) \le \|i(v)\|\,\|v\|$$

donne l'autre inégalité ; il en résulte que $\|i(v)\| = \|v\|$. De plus, le théorème de représentation dit que i est surjective (rédigé dans le cours n$^\mathrm{o}$ 3).

L'orthogonal du vecteur $v \in \mathrm{H}$ est le noyau d'une forme linéaire continue,

$$v^\perp = \{x \in \mathrm{H} : x \perp v\} = \ker i(v)\,;$$

c'est donc un sous-espace vectoriel fermé, un *hyperplan linéaire* quand v n'est pas nul (et l'espace entier sinon).

L'orthogonal $\mathrm{A}^\perp$ d'une partie A de H est défini par

$$\mathrm{A}^\perp = \{x \in \mathrm{H} : x \perp \mathrm{A}\}\,;$$

c'est un sous-espace vectoriel, fermé dans H, puisqu'on a

$$\mathrm{A}^\perp = \bigcap_{a\in \mathrm{A}} a^\perp.$$

On a toujours

$$\mathrm{A} \subset (\mathrm{A}^\perp)^\perp.$$

En effet, si $a \in \mathrm{A}$ et $b \in \mathrm{A}^\perp$, alors $b \perp a$ par définition de l'orthogonal ; donc a est orthogonal à tous les éléments b de $\mathrm{A}^\perp$, par conséquent $a \in (\mathrm{A}^\perp)^\perp$.

Décomposition orthogonale $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$

Proposition. *Si* F *est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert* H*, on a la décomposition en somme directe (orthogonale)*

$$\mathrm{H} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp\,;$$

les projecteurs algébriques sur les deux composantes de la somme directe sont les projections orthogonales sur F *et* $\mathrm{F}^\perp$ *respectivement, et*

$$(\mathrm{F}^\perp)^\perp = \mathrm{F}.$$

Preuve. — On a d'abord $\mathrm{F} \cap \mathrm{F}^\perp = \{0\}$, car tout vecteur v de cette intersection est orthogonal à lui-même, donc nul. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathrm{H}$ on peut considérer sa projection orthogonale $y = \mathrm{P}_\mathrm{F} x$: on sait que $x - y \perp \mathrm{F}$, donc l'égalité

$$x = y + (x - y) \in \mathrm{F} + \mathrm{F}^\perp$$

montre que H est égal à la somme $\mathrm{F} + \mathrm{F}^\perp$: on a bien une somme directe algébrique.

Puisque la représentation est unique, la première composante de x dans la décomposition en somme directe est le vecteur $y = \mathrm{P}_\mathrm{F} x$, donc P_F est le premier projecteur de la somme directe. La projection algébrique de x sur la deuxième composante de la somme directe est $z = x - y \in \mathrm{F}^\perp$, et $x - z = y \in \mathrm{F} \subset (\mathrm{F}^\perp)^\perp$: ces deux propriétés caractérisent z comme projection orthogonale de x sur $\mathrm{F}^\perp$. Le deuxième projecteur est bien $\mathrm{P}_{\mathrm{F}^\perp}$. Notons que

$$\mathrm{P}_{\mathrm{F}^\perp} = \mathrm{Id} - \mathrm{P}_\mathrm{F}.$$

On a toujours $\mathrm{F} \subset \mathrm{F}^{\perp\perp}$; inversement, soit x dans $\mathrm{F}^{\perp\perp}$ et décomposons

$$x = y + z \in \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp\,;$$

alors $z \in \mathrm{F}^\perp$ est orthogonal à $y \in \mathrm{F}$, $x \in \mathrm{F}^{\perp\perp}$ est orthogonal à $z \in \mathrm{F}^\perp$ donc

$$0 = \langle x, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle z, z\rangle = \langle z, z\rangle,$$

donc $z = 0$ et $x = y \in \mathrm{F}$.

Remarque-Exercice : pour tout sous-ensemble A de H, le biorthogonal $A^{\perp\perp}$ est le sous-espace vectoriel *fermé* engendré par A.

Dual (topologique) d'un espace de Hilbert, critère de totalité

(déjà rédigé dans le cours n° 3)

Une application (très classique) de l'identification du dual d'un Hilbert

Théorème. *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré ; si* μ *est* σ*-finie, le dual de* $L^1(X, \mu)$ « *est* » $L^\infty(X, \mu)$*, au sens suivant : pour toute forme linéaire continue* ℓ *sur* $L^1(X, \mu)$*, il existe une fonction* G *mesurable bornée sur* X*, unique à* μ*-équivalence près, telle que*

$$\forall F \in L^1(X, \mu), \quad \ell(F) = \int_X F\,G\,d\mu,$$

et de plus

$$\|G\|_{L^\infty(\mu)} = \|\ell\|_{(L^1(\mu))'}.$$

Preuve. — On considérera le cas réel pour simplifier. Comme μ est σ-finie, il existe une fonction $h \in L^2(X, \mu)$ qui est > 0 partout sur X, par exemple

$$h = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-n}}{\sqrt{1 + \mu(B_n)}}\,\mathbf{1}_{B_n},$$

où $(B_n)_{n\geqslant 0}$ est une partition dénombrable de X en ensembles $B_n \in \mathcal{A}$ de mesure finie. Si ℓ est une forme linéaire continue sur $L^1(X, \mu)$, on considère la forme linéaire φ définie sur $L^2(X, \mu)$ par

$$\varphi : f \in L^2(X, \mu) \to \ell(fh)\,;$$

l'application φ est linéaire, et continue sur $L^2(X, \mu)$ puisque

$$\forall f \in L^2(X, \mu), \quad |\varphi(f)| = |\ell(fh)| \le \|\ell\|\,\|fh\|_1 \le \|\ell\|\,\|h\|_2\,\|f\|_2$$

(Hölder, ou plutôt Cauchy-Schwarz), donc φ est représentable par le produit scalaire (réel, pas de barres de conjugaison) avec une fonction $g \in L^2(X, \mu)$:

$$\forall f \in L^2(X, \mu), \quad \ell(fh) = \varphi(f) = \langle f, g\rangle_{L^2(\mu)} = \int_X fg\,d\mu.$$

Posons $F = fh$, donc $f = F/h$, et posons $G = g/h$; si F/h est dans $L^2(X, \mu)$,

$$(*) \qquad \ell(F) = \varphi(F/h) = \int_X (Fg/h)\,d\mu = \int_X FG\,d\mu.$$

On va montrer que G est μ-presque partout bornée par $\|\ell\|$. Posons, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$A_\varepsilon = \{|G| \ge \|\ell\| + \varepsilon, \quad h > \varepsilon\}, \quad \text{et} \quad F_\varepsilon = \mathbf{1}_{A_\varepsilon}\,\mathrm{sign}(G).$$

Alors F_ε/h est dans $L^2(X, \mu)$ puisqu'on a par Markov

$$\int_X (|F_\varepsilon|^2/h^2)\,d\mu = \int_{A_\varepsilon} h^{-2}\,d\mu \le \varepsilon^{-2}\mu(A_\varepsilon) \le \varepsilon^{-4}\int_X h^2\,d\mu < \infty.$$

On a par conséquent le droit d'appliquer $(*)$,

$$\ell(\mathrm{F}_\varepsilon) = \int_{\mathrm{X}} \mathbf{1}_{\mathrm{A}_\varepsilon} \operatorname{sign}(\mathrm{G})\mathrm{G}\,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathrm{A}_\varepsilon} |\mathrm{G}|\,\mathrm{d}\mu \ge (\|\ell\| + \varepsilon)\mu(\mathrm{A}_\varepsilon)$$

d'après la définition de A_ε, et d'un autre côté,

$$|\ell(\mathrm{F}_\varepsilon)| \le \|\ell\|\,\|\mathrm{F}_\varepsilon\|_1 = \|\ell\|\,\mu(\mathrm{A}_\varepsilon).$$

Il en résulte que $\mu(\mathrm{A}_\varepsilon) = 0$. En faisant tendre ε vers 0 suivant la suite des valeurs (2^{-n}), on déduit que l'ensemble

$$\bigcup_{n\geqslant 0} \{|\mathrm{G}| \ge \|\ell\| + 2^{-n}, \quad h > 2^{-n}\} = \{|\mathrm{G}| > \|\ell\|, \quad h > 0\} = \{|\mathrm{G}| > \|\ell\|\}$$

est de mesure nulle, c'est-à-dire que $|\mathrm{G}| \le \|\ell\|$ μ-presque partout. On peut donc poser pour toute fonction $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1(\mathrm{X}, \mu)$

$$\ell_1(\mathrm{F}) = \int_{\mathrm{X}} \mathrm{FG}\,\mathrm{d}\mu,$$

et on a

$$|\ell_1(\mathrm{F})| \le \int_{\mathrm{X}} |\mathrm{FG}|\,\mathrm{d}\mu \le \|\mathrm{G}\|_\infty \int_{\mathrm{X}} |\mathrm{F}|\,\mathrm{d}\mu = \|\mathrm{G}\|_\infty \|\mathrm{F}\|_1.$$

Il en résulte que $\|\ell_1\| \le \|\mathrm{G}\|_\infty$, et cette forme linéaire ℓ_1 continue sur $\mathrm{L}^1(\mathrm{X}, \mu)$ coïncide avec ℓ sur un sous-espace dense dans $\mathrm{L}^1(\mathrm{X}, \mu)$, le sous-espace vectoriel V formé des $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1(\mathrm{X}, \mu)$ telles que $\mathrm{F}/h \in \mathrm{L}^2(\mathrm{X}, \mu)$ (voir plus bas la preuve de la densité de V), donc $\ell = \ell_1$. Finalement, ℓ est représentée par la fonction G et

$$\|\mathrm{G}\|_\infty \le \|\ell\| = \|\ell_1\| \le \|\mathrm{G}\|_\infty$$

montre que $\|\ell\| = \|\mathrm{G}\|_\infty$: l'identification entre le dual $(\mathrm{L}^1)'$ et L^∞ est isométrique.

Montrons l'unicité (comme classe). Si $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2$ sont deux fonctions de $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{X}, \mu)$ qui représentent ℓ, on aura

$$\int_{\mathrm{X}} \mathrm{F}(\mathrm{G}_1 - \mathrm{G}_2)\,\mathrm{d}\mu = 0$$

pour toute $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1$; en choisissant $\mathrm{F} = \mathbf{1}_{\mathrm{B}_n} \operatorname{sign}(\mathrm{G}_1 - \mathrm{G}_2)$, on obtient que $\mathbf{1}_{\mathrm{B}_n}|\mathrm{G}_1 - \mathrm{G}_2|$ est nulle presque partout, pour chacun des ensembles B_n qui recouvrent X : on en déduit que $\mathrm{G}_1 = \mathrm{G}_2$ μ-presque partout : c'est l'unicité à μ-équivalence près.

On a promis de montrer que le sous-espace vectoriel

$$\mathrm{V} = \{\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1 : \mathrm{F}/h \in \mathrm{L}^2(\mathrm{X}, \mu)\}$$

est dense dans $\mathrm{L}^1(\mathrm{X}, \mu)$. Comme h est > 0 partout, les ensembles $\mathrm{C}_n = \{h > 2^{-n}\}$ recouvrent X, et ils sont de mesure finie puisque h est de carré intégrable. Toute fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{X}, \mu)$ est limite simple presque partout de la suite $f_n = \mathbf{1}_{\mathrm{D}_n} f$, où on a posé $\mathrm{D}_n = \mathrm{C}_n \cap \{|f| < 2^n\}$, donc f_n tend vers f dans L^1 par convergence dominée (on a $|f_n| \le |f|$ pour tout n). On voit que f_n/h est bornée par 4^n et nulle hors d'un ensemble de mesure finie, donc de carré intégrable : ainsi, $f_n \in \mathrm{V}$ et la suite (f_n) tend vers f pour la norme de $\mathrm{L}^1(\mathrm{X}, \mu)$, donc V est dense dans $\mathrm{L}^1(\mathrm{X}, \mu)$.

Remarque 1. Ce théorème n'est pas vrai dans le cas le plus général : considérons la mesure μ sur un ensemble non vide X, telle que $\mu(\mathrm{A}) = +\infty$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ non vide, et $\mu(\emptyset) = 0$. Pour cette mesure pathologique, $\mathrm{L}^1(\mathrm{X}, \mu) = \{0\}$ et le dual de $\mathrm{L}^1(\mathrm{X}, \mu)$ est donc $\{0\}$ aussi ; mais $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{X}, \mu)$ contient les fonctions constantes, donc n'est pas nul et ne peut pas être le dual de cet espace $\mathrm{L}^1(\mathrm{X}, \mu)$.

Remarque 2. La même démonstration fonctionnerait pour prouver que toute forme linéaire continue sur $\mathrm{L}^p(\mathrm{X}, \mu)$, $1 < p < 2$, est représentable par une fonction $g \in \mathrm{L}^q(\mathrm{X}, \mu)$, avec $1/p + 1/q = 1$. En fait, ce résultat est vrai pour tout p tel que $1 < p < \infty$, mais le cas $p > 2$ ne découle pas de la preuve précédente ; on obtient le cas général en employant le théorème de Radon-Nikodym, qui peut être considéré comme une autre conséquence de la représentation du dual de $\mathrm{L}^2(\mathrm{X}, \mu)$.

Notons « pour la culture » que le théorème précédent, dans le cas $1 < p < \infty$, est valable pour toutes les mesures. En termes vagues, cela vient du fait qu'une forme linéaire continue sur L^p, $p > 1$, fait apparaître une partie σ-finie de l'espace mesuré en dehors de laquelle la forme linéaire est nulle.

Convolution et Fourier

Généralités

On considère un groupe commutatif G, qu'on notera additivement pour fixer les idées ; le lecteur fera les adaptations évidentes dans les exemples à notation multiplicative ; on suppose que G est muni d'une distance d invariante par translation,

$$\forall x, y, z \in \mathrm{G}, \quad d(x, y) = d(x + z, y + z),$$

pour laquelle les opérations de groupe $(x, y) \to x + y$ et $x \to -x$ sont continues ; on suppose que l'espace métrique (G, d) est localement compact, réunion dénombrable de compacts ; on suppose donnée une mesure μ sur la tribu borélienne de G, finie sur les compacts et invariante par translation et par le renversement $x \in \mathrm{G} \to -x$ (cette mesure est appelée la *mesure de Haar* du groupe G ; dans le cadre que nous avons choisi, on peut montrer son existence et son unicité à multiple près ; on pourra consulter Queffélec-Zuily, chap. VI, sect. V.2, pour ne pas sortir des ouvrages déjà connus).

Les premiers exemples sont : $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$ avec l'addition, la topologie usuelle et la mesure de Lebesgue ; le quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, avec la mesure de Haar normalisée $\mathrm{d}\mu(x) = \mathrm{d}x/(2\pi)$ sur l'ensemble de représentants $[0, 2\pi[$; l'ensemble $\mathbb{Z}$ avec la topologie discrète et la mesure de comptage ; les groupes cycliques $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, les groupes multiplicatifs $\{-1, 1\}^n$ avec la mesure uniforme sur ces ensembles finis ; le groupe compact $\{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ avec la mesure produit infini de la « mesure de Haar » sur $\{-1, 1\}$.

La convolution est définie, pour f et g continues sur X et à support compact, pour commencer, par la formule

$$\forall x \in \mathrm{G}, \quad (f * g)(x) = \int_{\mathrm{G}} f(x - t) g(t) \, \mathrm{d}\mu(t).$$

Dans le cas de $\mathbb{R}$, il faudra les outils techniques du théorème de Fubini-Lebesgue pour étendre cette définition à $\mathrm{L}^1 * \mathrm{L}^1$. Le cas de $\mathrm{L}^1(\mathbb{Z}) = \ell^1(\mathbb{Z})$ est direct : si $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $\mathbf{b} = (b_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ sont deux suites scalaires absolument sommables, on peut poser

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad (\mathbf{a} * \mathbf{b})_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{n-k} b_k,$$

et cette nouvelle suite $\mathbf{a} * \mathbf{b}$ est dans $\ell^1(\mathbb{Z})$, par les théorèmes sur les produits de séries absolument convergentes.

On considère l'ensemble $\widehat{\mathrm{G}}$ des *caractères* du groupe G, homomorphismes *continus* de G dans le cercle unité $\mathrm{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ du plan complexe, considéré comme groupe multiplicatif ; autrement dit,

$$\widehat{\mathrm{G}} = \{\chi : \mathrm{G} \to \mathrm{U} : \chi \text{ continu},\ \chi(0) = 1,\ \chi(x+y) = \chi(x)\chi(y)\}.$$

Le produit de deux caractères est un caractère, l'application constante $\mathbf{1}$ est un caractère, élément neutre du produit, et l'inverse $1/\chi : g \in \mathrm{G} \to 1/\chi(g)$ est un caractère : on a un groupe multiplicatif, le *groupe dual* $\widehat{\mathrm{G}}$. On note que l'inverse de χ est $\overline{\chi}$, puisque les valeurs sont sur le cercle unité,

$$\chi(-x) = \frac{1}{\chi(x)} = \overline{\chi(x)}.$$

Si la mesure μ est finie, les caractères $\neq \mathbf{1}$ sont d'intégrale nulle : comme μ est invariante par translation, le changement de variable $y = x + t$, $t \in \mathrm{G}$ fixé, donne

$$\int_{\mathrm{G}} \chi(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathrm{G}} \chi(y-t)\,\mathrm{d}\mu(y) = \overline{\chi(t)} \int_{\mathrm{G}} \chi(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\,;$$

si l'intégrale n'est pas nulle, on déduit $\chi(t) = 1$ pour tout $t \in \mathrm{G}$, donc $\chi = \mathbf{1}$. Les caractères sont deux à deux orthogonaux dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{G}, \mu)$: si φ, χ sont deux caractères, et comme $\overline{\chi}$ est un caractère, le produit $\varphi\overline{\chi}$ est un caractère et

$$\langle \varphi, \chi \rangle = \int_{\mathrm{G}} \varphi\overline{\chi}\,\mathrm{d}\mu = 0$$

si le caractère $\varphi\overline{\chi}$ est différent de 1, c'est-à-dire si $\varphi \neq \chi$.

La transformée de Fourier d'une fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{G}, \mu)$ est la fonction $\widehat{f}$ à valeurs complexes définie sur le dual $\widehat{\mathrm{G}}$ par

$$\widehat{f} : \chi \in \widehat{\mathrm{G}} \to \int_{\mathrm{G}} f(t)\overline{\chi(t)}\,\mathrm{d}\mu(t).$$

Exemples

Le dual de $\mathbb{Z}$ est facile à déterminer : un homomorphisme χ de $\mathbb{Z}$ dans U est connu dès qu'on donne $\chi(1) = z \in \mathrm{U}$, ce qui permet d'identifier $\widehat{\mathbb{Z}}$ à U (si $\chi(1) = z$, on en déduit évidemment $\chi(n) = z^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$). Le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est aussi isomorphe à U. Si on identifie U et $\mathbb{T}$ en posant $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, on voit que la transformée de Fourier de $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, exprimée en identifiant $\chi \in \widehat{\mathbb{Z}}$ à $\theta \in \mathbb{T}$, est donnée par

$$\widehat{\mathbf{a}} : \theta \in \mathbb{T} \to \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\,.$$

On peut montrer que tout caractère (continu) χ de $\mathbb{T}$ est de la forme

$$\theta \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

pour un certain $n \in \mathbb{Z}$: le dual de $\mathbb{T}$ s'identifie à $\mathbb{Z}$; c'est un cas particulier d'un phénomène général ; une fois que le dual $\widehat{\mathrm{G}}$ est muni de la topologie convenable, on montre que le dual du dual du groupe G est G lui-même (moyennant une identification analogue à celle d'un espace vectoriel comme sous-espace de son bidual).

La transformée de Fourier de $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ est la suite des coefficients de Fourier : en identifiant $\chi \in \widehat{\mathbb{T}}$ avec l'entier $n \in \mathbb{Z}$ qui définit χ, on a

$$\widehat{f} : n \in \mathbb{Z} \to \int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}\,\mathrm{d}\mu(t) = c_n(f).$$

Dans le cas de $\mathbb{R}$, le *groupe* dual s'identifie à $\mathbb{R}$ en associant à chaque $y \in \mathbb{R}$ l'homomorphisme

$$\chi_y : x \in \mathbb{R} \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy} \in \mathrm{U}$$

(exercice : démontrer que tout homomorphisme continu de $\mathbb{R}$ dans U est de cette forme). Dans le cas de $\mathbb{R}^d$, pour chaque $y \in \mathbb{R}^d$, on considère

$$\chi_y : x \in \mathbb{R}^d \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot y} \in \mathrm{U}$$

où $y = (y_1, \ldots, y_d)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^d$ et $x \cdot y$ le produit scalaire usuel, et on obtient ainsi tous les caractères (continus) de $\mathbb{R}^d$. Si on identifie le groupe dual de $\mathbb{R}^d$ à $\mathbb{R}^d$ au moyen de la correspondance $\chi_y \leftrightarrow y$, on voit que la transformée de Fourier est bien donnée par la formule usuelle,

$$y \in \mathbb{R}^d \to \int_{\mathbb{R}^d} f\,\overline{\chi_y}\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y}\,\mathrm{d}x.$$

Le dual du groupe cyclique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ s'identifie naturellement au groupe U_n des racines $n$èmes de l'unité, isomorphe au groupe cyclique de départ ; pour un produit de groupe cycliques le dual sera le produit des duaux. Dans tous ces cas finis on dispose d'une transformation de Fourier discrète ; celle du produit $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$ joue un rôle essentiel dans le codage JPEG des photos numériques.

Les groupes U, U_n, $\{-1, 1\}^n$ sont des exemples où la notation de la loi de groupe est multiplicative : le lecteur adaptera l'écriture des équations de convolution et Fourier.

Certaines notions s'étendent aux homomorphismes de G dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$; un homomorphisme φ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}^*$ est connu dès qu'on connaît l'image de 1, un certain $z \in \mathbb{C}^*$, et on a alors $\varphi(n) = z^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. À une suite $\mathbf{a} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, on peut associer la transformée du type Fourier-Laplace, extension du cas Fourier, définie par

$$z \in \mathbb{C}^* \to \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n,$$

série de Laurent qui n'a pas de raison de converger ailleurs que sur le cercle unité. De même, dans le cas de $\mathbb{R}$, on peut essayer de prolonger Fourier en

$$z \in \mathbb{C} \to \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xz}\,\mathrm{d}x,$$

qui n'a de sens en général que pour z réel.

Convolution dans le cas de mesure diffuse : $\mathrm{L}^1 * \mathrm{L}^1$
Si f et g sont mesurables sur $\mathbb{R}^d$, à valeurs dans $[0, +\infty]$, on peut poser pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t \in [0, +\infty].$$

De plus,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f * g = \Big(\int_{\mathbb{R}^d} f\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^d} g\Big).$$

Pour le montrer, on va appliquer Fubini positif, dont la seule hypothèse (pour des fonctions positives) est la mesurabilité. Or

$$(x, t) \to (x-t, t)$$

est continue donc borélienne sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$; le couple

$$(u, v) \to (f(u), g(v))$$

est mesurable de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ munis des tribus produit, et le produit des tribus boréliennes produit est la tribu borélienne du produit ; de plus

$$(a, b) \to ab$$

est continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, donc borélienne. Enfin

$$(x, t) \to f(x-t)g(t)$$

est la composition des trois, donc elle est mesurable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. On peut donc appliquer Fubini positif,

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x) = \iint f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$= \Big(\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,\mathrm{d}y\Big) \int_{\mathbb{R}^d} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Le cas périodique pose les mêmes problèmes, résolus par la même technique : Fubini. Le cas de $\mathbb{Z}$, déjà mentionné, est une simple question de produit de séries absolument convergentes.

Quand on sort du cas positif, on est confronté à la question du sens que peut avoir l'intégrale

$$\int f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Si f et g sont mesurables, ce qui est bien le minimum à demander, on a montré que

$$(x, t) \to f(x-t)g(t)$$

est mesurable, donc $t \to f(x-t)g(t)$ est mesurable pour tout x fixé. Pour définir l'intégrale (1), on choisira toujours ici de considérer l'intégrabilité *au sens de Lebesgue* de la fonction
$$t \to f(x-t)g(t).$$
Lorsque cette fonction est intégrable pour un x fixé, l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation et le changement de variable $u = x - t$ montrent que
$$\int f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int f(u)g(x-u)\,\mathrm{d}u.$$
Dans le cadre choisi, le problème posé par la définition de $f * g$ au point x est le même que celui posé par $g * f$. Il existe de très nombreux cadres qui permettent de garantir, ou bien que

– pour tout x fixé, $t \to f(x-t)g(t)$ est intégrable. Dans ce cas on parlera d'une convolution $f * g$ *partout définie*.

– ou pour *presque tout* x fixé, $t \to f(x-t)g(t)$ est intégrable. Dans ce cas on parlera d'une convolution $f * g$ *presque partout définie*.

La convolution est partout définie si par exemple, f est localement intégrable, et g bornée et nulle en dehors d'un certain borné. Cet exemple ne fera pas l'objet d'une étude très poussée dans ce qui suit (mais nous étudierons d'autres exemples de convolutions partout définies). Au contraire les cas du type $\mathrm{L}^1 * \mathrm{L}^p$ donnent lieu à des convolutions presque partout définies, dans lesquelles le théorème de Fubini-Lebesgue joue un rôle très important. On va commencer avec $\mathrm{L}^1 * \mathrm{L}^1$.

Notons que la convolution est commutative dans tous les cas où nous considérons qu'elle est définie,
$$f * g = g * f.$$

Théorème-définition. *Soient f, g deux fonctions de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$; pour presque tout x, la fonction $t \to f(x-t)g(t)$ est intégrable ; la fonction $f*g$ définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ par*
$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$
est intégrable, et
$$\int_{\mathbb{R}^d} f * g = \Bigl(\int_{\mathbb{R}^d} f\Bigr)\Bigl(\int_{\mathbb{R}^d} g\Bigr), \qquad \|f * g\|_1 \le \|f\|_1\,\|g\|_1.$$

Preuve. — L'application
$$(x, t) \to f(x-t)g(t)$$
est mesurable pour les mêmes raisons que précédemment, et elle est intégrable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ d'après le cas positif, car
$$\iint |f(x-t)|\,|g(t)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \Bigl(\int_{\mathbb{R}^d} |f|\Bigr)\Bigl(\int_{\mathbb{R}^d} |g|\Bigr) < \infty.$$
On peut donc appliquer le théorème de Fubini. Les deux premières affirmations de l'énoncé sont des traductions de Lebesgue-Fubini. La dernière est obtenue par la majoration $|f * g| \le |f| * |g|$,
$$|(f * g)(x)| = \Bigl|\int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t\Bigr| \le \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t)|\,|g(t)|\,\mathrm{d}t = (|f| * |g|)(x),$$

qui implique que

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |(f * g)(x)| \,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^d} (|f| * |g|)(x) \,\mathrm{d}x = \Bigl(\int_{\mathbb{R}^d} |f|\Bigr)\Bigl(\int_{\mathbb{R}^d} |g|\Bigr).$$

Convolution et Fourier

Théorème. *Si f, g sont dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}.$$

Preuve. — On introduit pour y fixé dans $\mathbb{R}^d$

$$f_y(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x\cdot y}, \quad g_y(x) = g(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x\cdot y}\,.$$

Si f, g sont intégrables, il en est de même pour f_y, g_y, et on peut leur appliquer les résultats précédents. On a

$$(f_y * g_y)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,(x-t)\cdot y - \mathrm{i}\,t\cdot y}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x\cdot y}(f * g)(x),$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_y = \widehat{f}(y), \;\; \int_{\mathbb{R}^d} g_y = \widehat{g}(y), \;\; \Bigl(\int_{\mathbb{R}^d} f_y\Bigr)\Bigl(\int_{\mathbb{R}^d} g_y\Bigr) = \int_{\mathbb{R}^d} (f_y * g_y) = (\widehat{f * g})(y).$$

Remarque. Autres cadres : quand $\mathrm{G} = \mathbb{T}$, les coefficients de Fourier d'une convolution périodique sont les produits des coefficients des deux fonctions. Dans le cas de $\mathbb{Z}$, la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\theta}$, transformée de $\mathbf{c} = \mathbf{a} * \mathbf{b}$, est le produit ponctuel des deux séries de Fourier de coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Le lecteur curieux pourra vérifier que la preuve du théorème précédent reste valable dans le cadre abstrait (G, μ) défini au début de cette section.

Localisation des convolutions

Déplacé au cours n° 5.

Le cas $\mathrm{L}^1 * \mathrm{L}^p$, $1 < p \leq \infty$

Déplacé au cours n° 5.