Le cas métrique. Précompacité

Théorème. *Pour une partie* A *non vide d'un espace métrique* (X, d)*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

– la partie A *est compacte ;*

– la partie A *vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass : toute suite* $(a_n) \subset \mathrm{A}$ *admet des sous-suites convergentes vers un point de* A *;*

– l'espace métrique (A, d) *est complet et pour tout* $\delta > 0$*, il peut être couvert par un nombre fini de boules de rayon* δ*, centrées en des points de* A*.*

– l'espace métrique (A, d) *est complet et pour tout* $\delta > 0$*, il peut être couvert par un nombre fini de boules de rayon* δ*, centrées en des points de* X*.*

Une partie A d'un espace métrique est dite *précompacte* si pour tout $\delta > 0$, il est possible de couvrir A par un nombre fini de boules de rayon δ (centrées en des points de A ou bien en des points de l'espace ambiant : il est facile de voir qu'on peut passer de l'un à l'autre en changeant δ en 2δ).

Preuve. — On a vu au cours précédent que si A est compacte dans un espace métrique, elle vérifie Bolzano-Weierstrass : le caractère métrique permet de passer de l'existence d'une valeur d'adhérence, toujours vraie pour une suite dans un compact arbitraire, à l'existence d'une sous-suite convergeant vers cette valeur d'adhérence (ce qui n'est pas toujours vrai : on verra un exemple plus loin).

Si la partie A vérifie Bolzano-Weierstrass, alors elle est complète : si une sous-suite (a_{n_k}) d'une suite de Cauchy $(a_n) \subset \mathrm{A}$ converge vers $a \in \mathrm{A}$, la suite (a_n) converge vers a. Si pour un certain $\delta > 0$ il est impossible de recouvrir A par un nombre fini de boules de rayon δ centrées en des points de A, on construit de proche en proche une suite (a_k) de points de A, mutuellement distants d'au moins δ, contredisant la possibilité d'extraction de sous-suites convergentes : en effet, on commence avec un point $a_0 \in \mathrm{A}$ quelconque, et d'après l'hypothèse de non-couverture, l'ensemble $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}(a_0, \delta)$ est non vide, ce qui permet d'y choisir le point a_1 ; quand $a_0, \ldots, a_n$ ont été choisis, on sait encore que

$$\mathrm{A} \setminus \bigl(\mathrm{B}(a_0, \delta) \cup \ldots \cup \mathrm{B}(a_n, \delta)\bigr)$$

est non vide, et on choisit a_{n+1} dans cet ensemble. On a donc $d(a_{n+1}, a_j) \geq \delta$ pour tout j tel que $0 \leq j \leq n$.

Il est évident que la troisième propriété implique la quatrième.

On suppose la quatrième, et on donne un recouvrement ouvert (U_i) de A. Couvrons A par une famille finie de boules de rayon $1/4$, centrées en des points de X. Leurs adhérences $\mathrm{F}_j = \overline{\mathrm{B}(x_j, 1/4)}$ sont des fermés de diamètre $\leq 1/2$, par continuité de la fonction distance. Si $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}$ n'est pas finiment couvrable par des ouverts U_i, l'une des parties fermées de cette famille finie, disons F_{j_0}, n'est pas finiment couvrable non plus ; renommons F_{j_0} en A_1, sous-ensemble fermé de A_0. Par la précompacité de A on peut couvrir A_1 par un nombre fini de fermés de diamètre $\leq 1/4$, et l'un deux, qui sera choisi comme A_2, n'est pas finiment couvrable. On continue ainsi à construire A_n fermé, de diamètre $\leq 2^{-n}$, contenu dans A_{n-1}, et qui ne peut pas être couvert par un nombre fini des ouverts U_i (en particulier, A_n est non vide).

Dans l'espace métrique complet A, on a une suite décroissante de fermés (A_n) non vides, de diamètre tendant vers 0 : il existe donc un point $a \in A$ commun, et il existe un ouvert U_{i_0} qui contient a. Cet ouvert contiendra les A_k pour k assez grand, donc ces A_k seront finiment couverts, contradiction de l'hypothèse de la construction. On en déduit que A admet un recouvrement par une sous-famille finie des (U_i) ; cela étant vrai pour tout recouvrement ouvert (U_i) de A, il en résulte que A est compact.

Remarque. Ce qui précède reprend un raisonnement écrit dans la thèse de Pierre Cousin, 1895, soutenue le même mois que celle d'Émile Borel. Les deux contiennent une forme du théorème de compacité de $[0, 1]$ ou des fermés bornés de $\mathbb{R}^2$. La preuve de Cousin est clairement parente de la preuve du théorème de Goursat (1900).

Remarque. Si un espace métrique complet (X, d) n'est pas compact, il existe $\delta > 0$ et une suite δ-écartée (x_n) dans X, c'est-à-dire que $d(x_m, x_n) \geq \delta$ quand $m \neq n$: en effet c'est une pièce qui est apparue dans le cycle d'équivalences.

Exemple. La boule unité d'un Hilbert de dimension infinie n'est pas compacte (voir plus loin un résultat beaucoup plus général, un théorème de F. Riesz) : en effet, on peut y construire une suite $(e_n)_{n\geqslant 0}$ orthonormée, qui vérifie $\|e_m - e_n\| = \sqrt{2}$ pour tous $m \neq n$.

Dans $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, la famille des translatées $(\tau_t f)_{t\geqslant 0}$ d'une fonction f de norme un n'est pas compacte : pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une suite de translations (t_n) telle que

$$\|\tau_{t_m} f - \tau_{t_n} f\|_p > (1 - \varepsilon)2^{1/p}$$

quand $m \neq n$.

Cube de Hilbert

Posons dans un Hilbert H de base hilbertienne $(e_n)_{n\geqslant 0}$, pour une suite $\mathbf{u} = (u_n)_{n\geqslant 0}$ positive de carré sommable donnée,

$$C_{\mathbf{u}} = \Big\{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e_n : |a_n| \leq u_n\Big\} = \big\{x \in H : \forall n \geq 0,\ |\langle x, e_n\rangle| \leq u_n\big\}.$$

On va montrer que $C := C_{\mathbf{u}}$ est compact. Tout d'abord, l'ensemble C est fermé dans l'espace complet H : si une suite $(c^{(k)})$ de points de C tend vers $x \in H$, il en résulte que les coordonnées $\langle c^{(k)}, e_n\rangle$ dans la base tendent vers la coordonnée correspondante de la limite, donc $|\langle x, e_n\rangle| \leq u_n$ pour tout n, et x appartient à C.

Montrons que C est précompact. Soit $\varepsilon > 0$ donné ; à chaque $a \in C$ associons

$$P_N a = \sum_{n=0}^{N} a_n e_n.$$

Posons $r_N = \sum_{k>N} u_k^2$, et choisissons N tel que $r_N < \varepsilon^2/4$. On a

$$\|P_N a - a\|^2 = \sum_{k>N} |a_k|^2 \leq r_N < \varepsilon^2/4,$$

et l'ensemble C_N des $P_N a$, $a \in C$, est un sous-ensemble borné d'un espace vectoriel de dimension $N + 1$, donc précompact. On peut couvrir C_N par un nombre fini de boules de rayon $\varepsilon/2$, et C est alors couvert par les boules de même centre et de rayon ε.

Variante énoncée avec une adhérence

Si X est complet et $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$ précompact, alors $\mathrm{A} = \overline{\mathrm{Y}}$ est compact (on dit que Y est *relativement compact* dans X).

Il suffit de noter que l'adhérence est finiment couvrable, et complète comme fermé de X complet. Pour couvrir l'adhérence $\overline{\mathrm{Y}}$, il suffit d'allonger un peu (arbitrairement peu) les rayons de boules qui couvrent Y.

On a aussi inversement (et c'est évident) : si Y est relativement compact dans un espace métrique (X, d), il est précompact.

On désignera par $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ l'espace vectoriel normé des applications linéaires *continues* entre deux espaces vectoriels normés E et F.

Définition. Un opérateur compact T de E dans un espace de Banach F est une application linéaire continue telle que l'image $\mathrm{T}(\mathrm{B_E})$ de la boule unité $\mathrm{B_E}$ de E soit relativement compacte dans F.

Exemple. Étant donnée une suite scalaire $\mathbf{u}$ de carré sommable, et l'espace de Banach c_0 des suites qui tendent vers 0, muni de la norme du sup, considérons l'opérateur diagonal $\mathrm{T}_{\mathbf{u}}$ de c_0 dans ℓ_2 qui est défini par

$$\forall \mathbf{x} \in c_0, \quad \mathrm{T}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = (u_n x_n)_{n \geqslant 0}.$$

On voit que l'image de la boule unité de c_0 est contenue dans le cube de Hilbert $\mathrm{C}_{\mathbf{u}}$, donc l'opérateur $\mathrm{T}_{\mathbf{u}}$ est compact. L'image de la boule unité n'est pas fermée, elle est dense dans le cube de Hilbert. Si on définissait l'opérateur en partant de l'espace ℓ^∞ des suites bornées, l'image de la boule unité serait exactement le cube de Hilbert.

Un théorème de Riesz

Théorème. *Si la boule unité d'un espace vectoriel normé* E *est recouverte par une union finie de boules de rayon* < 1*, la dimension de* E *est finie. En particulier, si* E *admet un voisinage de* 0 *précompact, il est de dimension finie.*

Preuve. — On peut supposer l'espace réel. On a par hypothèse, pour un certain $r < 1$ et un certain entier N

$$(*) \qquad \mathrm{B}(0,1) \subset \bigcup_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{B}(x_i, r).$$

On considère un sous-espace vectoriel Z de E, de dimension finie d, contenant tous ces points (x_i), $i = 1, \ldots, \mathrm{N}$ (par exemple le sous-espace vectoriel engendré par ces points). On a la même propriété $(*)$ relativement à Z,

$$\mathrm{B_Z}(0,1) \subset \bigcup_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{B_Z}(x_i, r),$$

où la notation $\mathrm{B_Z}$ désigne les boules de l'espace normé Z. Cet espace de dimension finie a « une » mesure de Lebesgue λ, non nulle pour les ouverts non vides, avec le degré d'homogénéité d et l'invariance par translation : la mesure de la boule $\mathrm{B_Z}(x_i, r)$ est la même que celle de $\mathrm{B_Z}(0, r)$ et vaut $r^d \lambda(\mathrm{B_Z}(0,1))$, donc

$$0 < \lambda(\mathrm{B_Z}(0,1)) \leq \mathrm{N}\, r^d \lambda(\mathrm{B_Z}(0,1))$$

donc $\mathrm{N}\, r^d \geq 1$ et

$$d \leq \frac{\ln \mathrm{N}}{\ln(1/r)} \ ;$$

comme ceci est valable pour tout Z de dimension finie contenant les points (x_i), on en déduit que la dimension de E admet la même majoration.

Remarque. Plus généralement, on montre qu'un espace vectoriel topologique avec un voisinage compact de 0 est de dimension finie.

On peut adapter la preuve précédente : soient K le voisinage compact de 0 et V un ouvert contenant 0 contenu dans K. On peut couvrir K avec un nombre fini N de translatés $x_i + r\mathrm{V}$, $0 < r < 1$. On raisonne comme avant sur un sous-espace vectoriel de dimension finie Z contenant les vecteurs de translation (x_i).

Corollaire. *Si* T *est un endomorphisme compact d'un espace de Banach* E *et* $\lambda \neq 0$, *le sous-espace propre* $\mathrm{E}_\lambda = \ker(\mathrm{T} - \lambda\, \mathrm{Id})$ *est de dimension finie.*

Preuve. — Sur E_λ, l'opérateur T est égal à $\lambda\, \mathrm{Id}$, donc

$$\mathrm{B}_{\mathrm{E}_\lambda} = \frac{1}{\lambda}\mathrm{T}(\mathrm{B}_{\mathrm{E}_\lambda}) \subset \frac{1}{\lambda}\mathrm{T}(\mathrm{B}_\mathrm{E})$$

est contenu dans un compact.

Argument diagonal

Produit dénombrable : on a une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 0}$ d'espaces topologiques ; les ensembles ouverts élémentaires sont de la forme

$$\mathrm{V} = \mathrm{U}_0 \times \mathrm{U}_1 \times \ldots \times \mathrm{U}_\mathrm{N} \times \prod_{k>\mathrm{N}} \mathrm{X}_k,$$

et les ouverts généraux sont réunion quelconque d'ensembles ouverts élémentaires.

Dans le cas où chacun des X_n est métrisable, avec une distance d_n, on peut munir le produit infini X d'une métrique qui définit la topologie produit, par exemple

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\min(1, d_n(x_n, y_n))}{2^n}.$$

Si on prouve que $d_n(x_n, .)$ est $\mathcal{O}$-continue, il en résulte que $d(x, .)$ est $\mathcal{O}$-continue comme série normalement convergente de fonctions continues.

Si $\varepsilon > 0$ est donné, et x_n étant fixé dans X_n, on prend pour U_n l'ouvert $d_n(x_n, .) < \varepsilon$, et l'ouvert élémentaire V de X pour lequel $\mathrm{U}_j = \mathrm{X}_j$ pour tout j sauf n. Cela montre que $x \in \mathrm{X} \to d_n(x_n, .)$ est $\mathcal{O}$-continue.

Il en résulte que les boules ouvertes de d sont dans $\mathcal{O}$.

Inversement, soient $\mathrm{U} \in \mathcal{O}$ et x un point de U ; par définition de la topologie produit $\mathcal{O}$, il existe un ouvert élémentaire V tel que V soit contenu dans U ; chaque coordonnée x_j de x avec $0 \leq j \leq \mathrm{N}$ vérifie $x_j \in \mathrm{U}_j$; il existe $\mathrm{B}_{d_j}(x_j, r_j)$ contenue dans U_j. Si $d(x, y) < 2^{-\mathrm{N}} r$, r le minimum des r_j, on aura le résultat voulu : la boule $\mathrm{B}_d(x, 2^{-\mathrm{N}} r)$ est contenue dans $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$, ce qui prouve que U est un ouvert de la topologie métrique définie par d.

On peut exprimer la propriété de Bolzano-Weierstrass de la façon suivante : si f est une application de $\mathbb{N}$ dans (K, d) (c'est-à-dire une *suite* $(f(n))$ de points de K) et si K est compact, il existe une injection croissante χ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que la suite $f \circ \chi$ converge dans K.

Proposition. *Si on a une suite d'applications $f_n : \mathbb{N} \to \mathrm{K}_n$ à valeurs dans des compacts métrisables $(\mathrm{K}_n)_{n \geqslant 0}$, il existe une injection croissante θ telle que $f_n \circ \theta$ converge dans K_n, pour tout $n \geq 0$.*

Preuve. — On choisit d'abord χ_0 telle que $f_0 \circ \chi_0$ converge dans K_0, et on construit de proche en proche des injections croissantes

$$\varphi_n = \chi_0 \circ \chi_1 \circ \ldots \circ \chi_n = \varphi_{n-1} \circ \chi_n$$

de la façon suivante : pour l'application $f_n \circ \chi_0 \circ \ldots \circ \chi_{n-1} = f_n \circ \varphi_{n-1}$ de $\mathbb{N}$ dans K_n, on trouve par Bolzano-Weierstrass, appliqué au compact métrique K_n, une injection croissante χ_n telle que $f_n \circ \chi_0 \circ \ldots \circ \chi_{n-1} \circ \chi_n = f_n \circ \varphi_n$ soit une suite convergente dans K_n. Posons ensuite pour $n \geq m \geq 0$

$$\theta_m(n) = (\chi_m \circ \ldots \circ \chi_n)(n)\,;$$

on a $\theta_m(n+1) > \theta_m(n)$: en effet pour toute injection croissante ψ, on a $\psi(n) \geq n$, donc

$$\begin{aligned} \theta_m(n+1) = (\chi_m \circ \ldots \circ \chi_n)(\chi_{n+1}(n+1)) &\geq (\chi_m \circ \ldots \circ \chi_n)(n+1) \\ &> (\chi_m \circ \ldots \circ \chi_n)(n) = \theta_m(n), \end{aligned}$$

donc θ_m est strictement croissante de $\{m, m+1, \ldots\}$ dans $\mathbb{N}$. En particulier, si on pose $\theta = \theta_0$, on obtient une injection croissante θ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Notons que pour tous $n > m \geq 0$, on a

$$\theta(n) = \varphi_m(\theta_{m+1}(n)),$$

ce qui implique la convergence dans K_m, quand $n \to \infty$, de

$$(f_m \circ \theta)(n) = (f_m \circ \varphi_m)(\theta_{m+1}(n)),$$

comme sous-suite (à partir du rang $n = m+1$) de la suite convergente $f_m \circ \varphi_m$. Finalement, la sous-suite $\theta(n) = \varphi_n(n)$ convient.

Le problème de l'argument diagonal est surtout de trouver un langage et des notations pour désigner une suite illimitée d'extractions de sous-suites. Une possibilité, autre que le langage des injections croissantes, est de parler de suites $(x_m)_{m \in \mathrm{M}}$ indexées par un sous-ensemble infini M des entiers. On voit clairement ce que signifie la convergence d'une telle « suite », et Bolzano s'exprime en disant qu'il existe un sous-ensemble infini $\mathrm{M}_1 \subset \mathrm{M}$ tel que la suite $(x_m)_{m \in \mathrm{M}_1}$ converge. Dans ce langage, on introduit de proche en proche une suite décroissante

$$\mathrm{M}_0 = \mathbb{N} \supset \mathrm{M}_1 \supset \ldots \supset \mathrm{M}_k \supset \ldots$$

de sous-ensembles infinis, tels que $(f_p(m))_{m \in \mathrm{M}_p}$ converge dans K_p, pour tout entier p. On définit alors « l'ensemble diagonal »

$$\mathrm{M} = \{m_0 < m_1 < \ldots < m_k < \ldots\}$$

où m_k est le plus petit élément de M_k qui est $> m_{k-1}$, et on vérifie que $(f_p(m))_{m \in \mathrm{M}}$ converge dans K_p, pour tout p.

Théorème de Tykhonov. *Tout produit d'espaces topologiques compacts est compact.*

Le théorème a été publié en 1930, en allemand, dans la revue (allemande) *Mathematische Annalen*, et le nom de l'auteur y était donné dans une transcription allemande comme *A. Tychonoff*.

Exemple de suite sans sous-suite convergente

Considérons l'espace X des applications de $\mathbb{R}$ dans le cercle unité U du plan complexe. Muni de la topologie de la convergence simple, qui est la topologie du produit $\mathrm{U}^{\mathbb{R}}$, c'est un espace compact d'après Tykhonov. Considérons la suite (e_n) de points du compact X donnée par les exponentielles

$$e_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nt}, \quad n \geq 0.$$

Cette suite (e_n) n'admet pas de suite convergente dans le compact X, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune sous-suite (e_{n_k}) qui converge simplement vers une fonction $f \in \mathrm{X}$. Sinon, la suite des fonctions

$$g_k : t \to |\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n_k t} - f(t)|^2$$

serait bornée par 4, simplement convergente vers 0, donc

$$\int_0^{2\pi} |\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n_k t} - f(t)|^2 \,\mathrm{d}t$$

tendrait vers 0 par convergence dominée : la sous-suite (e_{n_k}) serait de Cauchy dans $\mathrm{L}^2([0, 2\pi], \mathrm{d}x)$, ce qui est impossible puisque

$$\int_0^{2\pi} |\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,mt} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nt}\,|^2 \,\mathrm{d}t = 4\pi$$

quand $m \neq n$.