Problème.

Dans tout ce problème on désignera, pour tout $p \in \{1, 2\}$ et tout réel $r > 0$, par $\mathcal{E}_p(r)$ l'ensemble des fonctions $f \in L^p(\mathbb{R})$ telles que la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f est nulle presque partout en dehors de l'intervalle $[-r, r]$.

On se propose d'établir les inégalités de *Bernstein*

$$\forall r > 0, \forall j \in \mathbb{N}, \forall f \in \mathcal{E}_p(r), \quad \|f^{(j)}\|_{L^p} \leq r^j \|f\|_{L^p}$$

où $f^{(j)}$ désigne la dérivée j-ème de f.

On notera par h la fonction 2π périodique, impaire, telle que

$$h(x) = x \quad \text{pour } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \pi - x \quad \text{pour } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi.$$

Dorénavant, p désignera l'entier 1 ou 2.

1. On va commencer par démontrer une version affaiblie des inégalités de Bernstein, s'énonçant ainsi. *Soit j un entier. Il existe une constante C telle que pour tout réel r strictement positif et toute fonction f de classe C^j sur $\mathbb{R}$, élément de $\mathcal{E}_p(r)$, on ait*

$$\|f^{(j)}\|_{L^p} \leq C r^j \|f\|_{L^p}.$$

   (a) Soit $f \in \mathcal{E}_p(r)$. Montrer que la fonction f_r définie par $f_r(x) = f(r^{-1}x)$ est dans $\mathcal{E}_p(1)$ et calculer $\|f_r\|_{L^p}$ (resp. $\|f_r^{(j)}\|_{L^p}$) en fonction de $\|f\|_{L^p}$ (resp. $\|f^{(j)}\|_{L^p}$).

   (b) Soit ϕ une fonction de classe C^∞, à support dans $\{x \in \mathbb{R}, |x| \leq 2\}$, et telle que $\phi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$. Montrer que

$$f_r = \frac{1}{2\pi} m \star f_r, \quad \text{avec} \quad m = \overline{\mathcal{F}}(\phi).$$

   (c) En déduire l'inégalité de Bernstein affaiblie.

   On va à présent démontrer l'inégalité de Bernstein.

2. Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$. On suppose que

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|) |\widehat{f}(\xi)| \, d\xi < \infty. \tag{1}$$

   Montrer qu'il existe une fonction φ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et tendant vers zéro à l'infini, telle que $f(x) = \varphi(x)$ presque partout.

3. Soit $f \in \mathcal{E}_p(r)$. Montrer que f vérifie la propriété (1).

   Tout élément de $\mathcal{E}_p(r)$ possède donc un unique représentant de classe C^1, donc dans la suite on considèrera que $\mathcal{E}_p(r)$ est un sous-espace de l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ tendant vers zéro à l'infini.

4. En décomposant h en série de Fourier, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \frac{2i}{\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} e^{i(2k+1)x}.$$

   En déduire que

$$\frac{\pi^2}{4} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

   (On admettra que h est partout somme de la série de Fourier. Question subsidiaire : le justifier.)

5. Soit $f \in \mathcal{E}_p(\pi/2)$. On note $\tau_a f(x) = f(x-a)$ pour tous $a, x \in \mathbb{R}$.

   (a) Montrer que la série de fonctions

$$-\frac{2}{\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \tau_{-2k-1} f$$

   converge dans $L^p(\mathbb{R})$ et dans $C_0(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues tendant vers zéro à l'infini (muni de la norme du sup).
   On désignera par g la somme de cette série.

   (b) Exprimer la transformée de Fourier de g à l'aide de celle de f. En déduire que $f' = g$ et que

$$\|f'\|_{L^p} \leq \frac{\pi}{2} \|f\|_{L^p}.$$

6. Soit $f \in \mathcal{E}_p(r)$. Montrer que f est une fonction de classe C^∞ et établir l'inégalité de Bernstein. *On se ramènera au cas de la question 5 par un changement de variables.*

7. Soit u une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de l'intervalle $[-1,1]$. Soit v la transformée de Fourier inverse de u, définie par

$$v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} u(\xi)\, d\xi.$$

   (a) Montrer que $v \in \mathcal{E}_p(1)$ pour $p \in \{1,2\}$. *On pourra montrer que $x \mapsto (1+x^2)v(x)$ est une fonction bornée.*

   (b) Pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, on pose $f_\varepsilon(x) = e^{i(1-\varepsilon)x} v(\varepsilon x)$. Montrer que f_ε appartient à $\mathcal{E}_p(1)$ et montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\|f_\varepsilon^{(j)}\|_{L^p}}{\|f_\varepsilon\|_{L^p}} = 1$$

   pour tout entier $j \geq 1$. En déduire que l'inégalité de Bernstein ne peut être améliorée, au sens où l'on ne peut avoir

$$\forall j \in \mathbb{N}, \exists c < 1,\ \forall r > 0, \forall f \in \mathcal{E}_p(r), \|f^{(j)}\|_{L^p} \leq c r^j \|f\|_{L^p}.$$