Problème.

Dans tout ce problème on désignera, pour tout $p \in \{1, 2\}$ et tout réel $r > 0$, par $\mathcal{E}_p(r)$ l'ensemble des fonctions $f \in L^p(\mathbb{R})$ telles que la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f est nulle presque partout en dehors de l'intervalle $[-r, r]$.

On se propose d'établir les inégalités de Bernstein

$$\forall r > 0,\ \forall j \in \mathbb{N},\ \forall f \in \mathcal{E}_p(r), \quad \|f^{(j)}\|_{L^p} \leq r^j \|f\|_{L^p}.$$

On notera par h la fonction 2π périodique, impaire, telle que

$$h(x) = x \ \textit{pour}\ 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \quad \textit{et} \quad h(x) = \pi - x \ \textit{pour}\ \frac{\pi}{2} < x \leq \pi.$$

Dorénavant, p désignera l'entier 1 ou 2.

1. *On va commencer par démontrer une version affaiblie des inégalités de Bernstein, s'énonçant ainsi. Soit j un entier. Il existe une constante C telle que pour tout réel r strictement positif et toute fonction f de classe C^j sur $\mathbb{R}$, élément de $\mathcal{E}_p(r)$, on ait*

$$\|f^{(j)}\|_{L^p} \leq C r^j \|f\|_{L^p}.$$

(a) *Soit $f \in \mathcal{E}_p(r)$. Montrer que la fonction f_r définie par $f_r(x) = f(r^{-1}x)$ est dans $\mathcal{E}_p(1)$ et calculer $\|f_r\|_{L^p}$ (resp. $\|f_r^{(j)}\|_{L^p}$) en fonction de $\|f\|_{L^p}$ (resp. $\|f^{(j)}\|_{L^p}$).*

Il est évident que $f_r(x) = f(r^{-1}x)$ est dans $\mathcal{E}_p(1)$, et on a

$$\|f_r\|_{L^p} = r^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p}, \quad \|f_r^{(j)}\|_{L^p} = r^{\frac{1}{p}-j} \|f^{(j)}\|_{L^p}.$$

(b) *Soit ϕ une fonction de classe C^∞, à support dans $\{x \in \mathbb{R},\ |x| \leq 2\}$, et telle que $\phi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$. Montrer que*

$$f_r = \frac{1}{2\pi} m \star f_r, \quad \textit{avec} \quad m = \overline{\mathcal{F}}(\phi).$$

On a

$$\widehat{f_r}(\xi) = \phi \widehat{f_r}(\xi)$$

et le résultat suit en prenant la transformée de Fourier inverse.

(c) *En déduire l'inégalité de Bernstein affaiblie.*
On a

$$f_r^{(j)} = \frac{1}{2\pi} m^{(j)} \star f_r,$$

et il suffit lors d'appliquer l'inégalité de Young pour obtenir

$$\|f_r^{(j)}\|_{L^p} \leq \frac{1}{2\pi} \|m^{(j)}\|_{L^1} \|f_r\|_{L^p} = C \|f_r\|_{L^p}.$$

Le résultat est alors une conséquence directe des calculs de la question 1a.

On va à présent démontrer l'inégalité de Bernstein.

2. *Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$. On suppose que*

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)|\widehat{f}(\xi)| \, d\xi < \infty. \tag{1}$$

Montrer qu'il existe une fonction φ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et tendant vers zéro à l'infini, telle que $f(x) = \varphi(x)$ presque partout.

D'après la condition (1), on sait que $\widehat{f}$ et $\xi\widehat{f}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$. Par le théorème d'inversion de Fourier, la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) \, d\xi$$

est continue et tend vers zéro à l'infini. Elle est égale presque partout à f. On montre ensuite que φ est de classe C^1 en appliquant le théorème de dérivation à l'intégrale définissant φ, ce qui est possible car

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) \right) \right| = |\xi||\widehat{f}(\xi)| \in L^1(\mathbb{R}).$$

3. *Soit $f \in \mathcal{E}_p(r)$. Montrer que f vérifie la propriété (1).*

Dans le cas $p = 1$, on utilise le fait que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad |\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)|\widehat{f}(\xi)| \, d\xi = \int_{-r}^{r} (1 + |\xi|)|\widehat{f}(\xi)| \, d\xi \leq \|f\|_{L^1} \int_{-r}^{r} (1 + |\xi|) \, d\xi < \infty.$$

Dans le cas où $p = 2$ on sait que $\widehat{f} \in L^2$ donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)|\widehat{f}(\xi)| \, d\xi \leq \|\widehat{f}\|_{L^2} \left(\int_{-r}^{r} (1 + |\xi|)^2 \, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Tout élément de $\mathcal{E}_p(r)$ possède donc un unique représentant de classe C^1, donc dans la suite on considèrera que $\mathcal{E}_p(r)$ est un sous-espace de l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ tendant vers zéro à l'infini.

4. *En décomposant h en série de Fourier, montrer que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \frac{2i}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} e^{i(2k+1)x}.$$

On note que h est impaire, donc les coefficients de Fourier de h vérifient

$$c_n(h) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\pi} h(x) \sin(nx)\, dx$$

Un changement de variables montre que

$$c_n(h) = -\frac{i}{\pi}(1-(-1)^n) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(nx)\, dx$$

donc après une intégration par parties (pour n impair) il vient

$$c_{2n} = 0 \quad \text{et} \quad c_{2n+1} = \frac{2i}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}.$$

En déduire que

$$\frac{\pi^2}{4} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

(On admettra que h est partout somme de sa série de Fourier. Question subsidiaire : le justifier)

On remarque que la série $\sum |c_n(h)|$ est convergente et comme h est de classe C^1 par morceaux et continue, elle est partout somme de sa série de Fourier ce qui donne la première égalité. La seconde s'obtient en prenant $x = \pi/2$ dans la première.

5. *Soit $f \in \mathcal{E}_p(\pi/2)$, avec $p \in \{1,2\}$. On note $\tau_a f(x) = f(x-a)$ pour tous $a, x \in \mathbb{R}$.*

   (a) *Montrer que la série de fonctions*

   $$-\frac{2}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \tau_{-2k-1} f$$

   converge dans $L^p(\mathbb{R})$ et dans $C_0(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues tendant vers zéro à l'infini (muni de la norme du sup).

   On remarque que si X désigne $L^p(\mathbb{R})$ ou $C_0(\mathbb{R})$, qui sont tous deux des espaces normés complets, on a

   $$\left\| \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \tau_{-2k-1} f \right\|_X = \frac{1}{(2k+1)^2} \|f\|_X$$

   donc la série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \tau_{-2k-1} f$ converge dans X.

   On désignera par g la somme de cette série.

(b) *Exprimer la transformée de Fourier de g à l'aide de $\widehat{f}$ et de h. En déduire que $f' = g$ et que*

$$\|f'\|_{L^p} \leq \frac{\pi}{2}\|f\|_{L^p}.$$

La transformée de Fourier étant linéaire et continue de L^1 dans C_0 (resp. de L^2 dans lui-même) on a

$$\widehat{g}(\xi) = -\frac{2}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} e^{i(2k+1)\xi}\widehat{f}(\xi)$$

dans X, où $X = C_0$ (resp. $X = L^2$). Par la question (4), associée au fait que $h(\xi) = \xi$ là où $\widehat{f}$ ne s'annule pas, on a presque partout

$$\widehat{g}(\xi) = ih(\xi)\widehat{f}(\xi) = i\xi\widehat{f}(\xi).$$

On en déduit que $g = f'$, puis que

$$\|f'\|_{L^p} \leq \frac{2}{\pi}\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}\tau_{-2k-1}f\right\|_{L^p} = \frac{2}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2k+1)^2}\|f\|_{L^p} = \frac{\pi}{2}\|f\|_{L^p}.$$

6. *Soit $f \in \mathcal{E}_p(r)$. Montrer que f est une fonction de classe C^∞ et établir l'inégalité de Bernstein.On se ramènera au cas de la question 5 par un changement de variables.*

Afin de se ramener aux questions précédentes, on pose

$$F(x) = f\left(\frac{\pi x}{2r}\right).$$

Alors

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{F}(\xi) = \frac{2r}{\pi}\widehat{f}\left(\frac{2r\xi}{\pi}\right)$$

qui est donc nulle en dehors de $[-\pi/2, -\pi/2]$. On peut donc appliquer à F la question 5. Comme

$$\|F\|_{L^p} = \left(\frac{\pi}{2r}\right)^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p} \quad \text{et} \quad \|F'\|_{L^p} = \left(\frac{\pi}{2r}\right)^{-\frac{1}{p}+1}\|f'\|_{L^p}$$

on trouve que

$$\|f'\|_{L^p} \leq r\|f\|_{L^p}.$$

On conclut ensuite par récurrence : on a démontré l'inégalité de Bernstein pour $j = 1$, supposons qu'elle est vraie pour $j > 1$. En remarquant que $f^{(j)}$ appartient à $\mathcal{E}_p(r)$ et en appliquant l'inégalité ci-dessus il vient

$$\|f^{(j+1)}\|_{L^p} \leq r\|f^{(j)}\|_{L^p} \leq r^{j+1}\|f\|_{L^p}.$$

Le résultat est donc démontré, par récurrence.

7. *Soit u une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de l'intervalle $[-1,1]$. Soit v la transformée de Fourier inverse de u, définie par*

$$v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} u(\xi)\, d\xi.$$

   (a) *Montrer que $v \in \mathcal{E}_p(1)$ pour $p \in \{1,2\}$. On pourra montrer que $x \mapsto (1+x^2)v(x)$ est une fonction bornée.*

   La fonction v est la transformée de Fourier inverse de u. Puisque u appartient évidemment à L^2, il en est de même pour v ; de plus $\widehat{v} = u$, ce qui montre que $v \in \mathcal{E}_2(1)$.

   Comme la fonction $u - u''$ appartient à L^1, sa transformée de Fourier inverse, à savoir la fonction $x \mapsto (1+x^2)v(x)$, est bornée sur $\mathbb{R}$. On déduit que, pour une certaine constante $\alpha > 0$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |v(x)| \leq \frac{\alpha}{1+x^2}$$

   et donc que $v \in L^1$. On obtient ainsi $v \in \mathcal{E}_1(1)$.

   (b) *Pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, on pose $f_\varepsilon(x) = e^{i(1-\varepsilon)x} v(\varepsilon x)$. Montrer que f_ε appartient à $\mathcal{E}_p(1)$ et montrer que*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\|f_\varepsilon^{(j)}\|_{L^p}}{\|f_\varepsilon\|_{L^p}} = 1$$

   pour tout entier $j \geq 1$. En déduire que l'inégalité de Bernstein ne peut être améliorée.

   On a

$$\widehat{f_\varepsilon}(\xi) = \frac{1}{\varepsilon} u\left(\frac{\xi - (1-\varepsilon)}{\varepsilon}\right),$$

   ce qui implique que $\widehat{f_\varepsilon}$ est nulle en dehors de l'intervalle $[1-2\varepsilon, 1]$, a fortiori en dehors de l'intervalle $[-1,1]$. On a aussitôt $\|f_\varepsilon\|_p = \varepsilon^{-1/p}\|v\|_p$. À l'aide de la formule de Leibniz, on écrit

$$f_\varepsilon^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^{j} C_k^j \left(i(1-\varepsilon)\right)^k e^{\mathrm{i}(1-\varepsilon)x} \varepsilon^{j-k} v^{(j-k)}(\varepsilon x)\,.$$

   On note alors que, du point de vue de la norme L^p, c'est le terme $k = j$ qui est dominant dans l'expression ci-dessus. On a, plus précisément,

$$\left| \|f_\varepsilon^{(j)}\|_p - \varepsilon^{-1/p}(1-\varepsilon)^j \|v\|_p \right| \leq \sum_{k=0}^{j-1} C_k^j (1-\varepsilon)^k \varepsilon^{j-k} \varepsilon^{-1/p} \|v^{(j-k)}\|_p \leq \alpha_j \varepsilon^{1-(1/p)}\,,$$

   pour une certaine constante α_j. On en déduit que

$$\left| \|f_\varepsilon^{(j)}\|_p \|f_\varepsilon\|_p^{-1} - (1-\varepsilon)^j \right| \leq \alpha_j \|v\|_p^{-1} \varepsilon\,,$$

et donc que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\|f_\varepsilon^{(j)}\|_p}{\|f_\varepsilon\|_p} = 1\,.$$

L'inégalité de Bernstein ne peut donc pas être améliorée.