Majoration de la dérivée

Il s'agit de majorer sur un disque la dérivée f' d'une fonction holomorphe, à partir d'une estimation de f sur un disque plus grand. On ne va pas trouver la majoration optimale, mais une majoration dont le principe est très simple.

Lemme. *Si $f \in \mathrm{H}(\Omega)$ est majorée par M dans le disque fermé $\overline{\mathrm{D}(z_0, \mathrm{R})}$, sa dérivée f' est majorée par $4\mathrm{M}/\mathrm{R}$ dans $\overline{\mathrm{D}(z_0, \mathrm{R}/2)}$.*

Rappel : le maximum de $|f|$ sur le disque fermé de rayon R est atteint sur le cercle de rayon R, bord du disque.

Preuve. — On écrit
$$f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n.$$
Si f est majorée par M sur le cercle de rayon R, on a, par les inégalités de Cauchy,
$$\forall n \ge 0, \qquad |a_n| \mathrm{R}^n \le \mathrm{M}.$$
Si h est tel que $|h| \le \mathrm{R}/2$ on aura
$$|f'(z_0 + h)| = \Bigl| \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n h^{n-1} \Bigr| \le \sum_{n=0}^{+\infty} n |a_n| \frac{\mathrm{R}^{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{1}{\mathrm{R}} \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{|a_n| \mathrm{R}^n}{2^{n-1}}$$
$$\le \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}} \sum_{n=0}^{+\infty} n \Bigl(\frac{1}{2} \Bigr)^{n-1} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}} \Bigl(\frac{1}{1 - 1/2} \Bigr)^2 = \frac{4\mathrm{M}}{\mathrm{R}}.$$

$\mathbb{C}$-dérivée sous l'intégrale

Proposition. *On suppose donnés un espace mesuré $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$, un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et une fonction complexe $f(z, x)$ avec $(z, x) \in \Omega \times \mathrm{X}$. On suppose que*

1. *La fonction $f_x : z \to f(z, x)$ est holomorphe dans Ω pour tout $x \in \mathrm{X}$.*

2. *Pour tout compact $\mathrm{K} \subset \Omega$ il existe g_K μ-intégrable telle que $|f(z, x)| \le g_\mathrm{K}(x)$ pour tout $z \in \mathrm{K}$.*

On pose
$$\mathrm{F}(z) = \int_\mathrm{X} f(z, x) \,\mathrm{d}\mu(x).$$
La fonction F est holomorphe dans Ω, et sa dérivée est obtenue en dérivant sous l'intégrale,
$$\mathrm{F}'(z) = \int_\mathrm{X} f'_x(z) \,\mathrm{d}\mu(x).$$

Preuve. — On prend $z_0 \in \Omega$ et R tel que $\mathrm{K} = \overline{\mathrm{D}(z_0, \mathrm{R})} \subset \Omega$; alors $|f'_x| \le 4 g_\mathrm{K}(x)/\mathrm{R}$ dans le demi-disque $\mathrm{K}_1 = \overline{\mathrm{D}(z_0, \mathrm{R}/2)}$, donc pour $|h| \le \mathrm{R}/2$ on a par le lemme précédent
$$\Bigl| \frac{f(z_0 + h, x) - f(z_0, x)}{h} \Bigr| = \frac{1}{|h|} \Bigl| \int_{[z_0, z_0 + h]} f'_x(w) \, dw \Bigr| \le 4 g_\mathrm{K}(x)/\mathrm{R},$$
qui converge vers $f'_x(z_0)$ avec domination intégrable quand h tend vers 0.

Application : dérivation de la formule de Cauchy pour un cercle ; si f est holomorphe dans un ouvert qui contient $\overline{\mathrm{D}(z_0,r)}$, on a pour tout z tel que $|z-z_0|<r$ que

$$f'(z)=\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_{r,z_0}}\frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw.$$

On peut itérer et calculer toutes les dérivées

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!}=\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_{r,z_0}}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw.$$

On peut en déduire une majoration de la dérivée plus précise que celle du lemme, en supposant $z_0=0$ pour simplifier :

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\mathrm{R}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{(\mathrm{R}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-z)^2}\,\mathrm{R}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

donc

$$|f'(z)|\le \mathrm{RM}\int_0^{2\pi}\frac{1}{|\mathrm{R}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-z|^2}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}=\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}}\int_0^{2\pi}\frac{1}{|1-z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}/\mathrm{R}|^2}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi},$$

qui se calcule par Bessel, sachant que

$$\frac{1}{1-z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}/\mathrm{R}}=\sum_{n=0}^{+\infty}(z/\mathrm{R})^n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta},$$

donc

$$|f'(z)|\le\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}}\sum_{n=0}^{+\infty}\Bigl(\frac{|z|^2}{\mathrm{R}^2}\Bigr)^n=\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}(1-|z|^2/\mathrm{R}^2)}=\frac{\mathrm{MR}}{\mathrm{R}^2-|z|^2}$$

qui donne quand $|z|=\mathrm{R}/2$ la valeur $4\mathrm{M}/(3\mathrm{R})$.

Théorème. *Si $(f_n)\subset\mathrm{H}(\Omega)$ converge uniformément vers f sur tout compact de Ω, alors f est holomorphe et les dérivées convergent aussi uniformément sur tout compact de Ω.*

Preuve. — On fixe $z_0\in\Omega$, puis R tel que $\mathrm{K}:=\overline{\mathrm{D}(z_0,\mathrm{R})}\subset\Omega$; pour m,n assez grands on aura $|f_n-f_m|\le\varepsilon$ sur K, donc sur la boule fermée K_1 de rayon moitié $\mathrm{R}/2$ on aura par le lemme

$$|f_n'-f_m'|\le\frac{4}{\mathrm{R}}\varepsilon.$$

Il y a donc convergence uniforme sur K_1 vers une certaine fonction g continue, et pour $|h|<\mathrm{R}/2$

$$\begin{aligned}f(z_0+h)-f(z_0)&=\lim_n\bigl(f_n(z_0+h)-f_n(z_0)\bigr)\\&=\lim_n\int_0^1 f_n'(z_0+th)h\,\mathrm{d}t=\int_0^1 g(z_0+th)h\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

donc

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\int_0^1 g(z_0+th)\,\mathrm{d}t$$

tend vers $g(z_0)$ quand h tend vers 0. On a donc $f'(z_0)=g(z_0)$. La fonction limite f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω.

La preuve précédente montre que la suite (f_n') converge simplement sur Ω vers la dérivée f' de f, mais de plus, pour chaque point z_0, on a vu que la convergence est uniforme dans un voisinage de z_0 : par extraction de sous-recouvrement fini, cela implique la convergence uniforme sur tout compact de la suite (f_n') vers f'.

Théorème de Cauchy homologique

À lire dans une édition pas trop vieille de Rudin, ARC. Un *cycle* est une combinaison linéaire formelle de lacets, à coefficients dans $\mathbb{Z}$,

$$\Gamma = \sum_{j=1}^{m} n_j \gamma_j.$$

On définit l'intégrale d'une fonction sur un cycle par

$$\int_\Gamma f(w)\,dw = \sum_{j=1}^{m} n_j \int_{\gamma_j} f(w)\,dw.$$

En particulier, on définit l'indice par rapport à un cycle de cette façon.

On dit qu'un cycle Γ contenu dans Ω (c'est-à-dire que tous les lacets γ_j qui le composent sont tracés dans Ω) est *homologue à* 0 dans Ω si

$$\mathrm{ind}_\Gamma(z) = 0$$

pour tout point z extérieur à Ω. Si Ω est étoilé et si γ est un lacet dans Ω, alors γ est homologue à 0,

$$\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = 0$$

pour tout z extérieur à Ω. En effet, la fonction $w \to (w-z)^{-1}$ est holomorphe dans Ω, donc elle admet une $\mathbb{C}$-primitive dans l'ouvert étoilé et son intégrale sur les lacets est nulle.

Théorème. *On suppose que γ est un lacet dans l'ouvert Ω (ou un* cycle, *c'est-à-dire une somme formelle de lacets, à coefficients dans $\mathbb{Z}$), tel que*

$$\mathrm{ind}_\gamma(w) = 0$$

pour tout $w \notin \Omega$. Alors, pour tout $z \in \Omega$ et $f \in \mathrm{H}(\Omega)$, on a

$$\mathrm{ind}_\gamma(z) f(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

En particulier, pour toute $g \in \mathrm{H}(\Omega)$,

$$\int_\gamma g(w)\,dw = 0.$$

Preuve succinte. — On pose pour tout $z \in \Omega$

$$\mathrm{F}(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw$$

qui est holomorphe dans Ω par le théorème sur l'holomorphie des intégrales à paramètre. Par ailleurs on pose

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{ind}_\gamma(z) = 0\}\,;$$

c'est un ouvert, voisinage de l'infini, et par l'hypothèse $\Omega \cup \Omega_1 = \mathbb{C}$. Sur Ω_1, la fonction

$$\mathrm{F}_1(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

est holomorphe, tend vers 0 à l'infini et recolle avec F dans $\Omega \cap \Omega_1$. Par Liouville la fonction entière recollée est nulle. Or le résultat annoncé équivaut à $\mathrm{F}(z) = 0$.

Pour la formule avec g introduire $f(w) = (w-z)g(w)$.

Conséquence : résidus.
On suppose que E est fermé dans Ω, discret, que f est holomorphe dans $\Omega \setminus \mathrm{E}$ et que γ est un lacet dans Ω (ou un cycle), évitant les points de E, et qui est homologue à 0 dans Ω au sens défini avant le théorème précédent.

L'ouvert Ω_1 où l'indice par rapport à γ est nul est un voisinage de l'infini, donc il est de complémentaire compact K contenu dans Ω, et K ne contient qu'une partie finie E_1 de l'ensemble discret E.

On trace un petit cercle positif γ_e de rayon $r_e > 0$ autour de chaque point e de E_1, de sorte que $\mathrm{D}(e, 2r_e)^* \subset \Omega$ et que les différents disques $\mathrm{D}(e, 2r_e)$, $e \in \mathrm{E}_1$, soient disjoints entre eux et de γ^*. On pose $\Omega' = \Omega \setminus \mathrm{E}$ et on introduit le cycle

$$\Gamma = \gamma + \sum_{e \in \mathrm{E}_1} n_e \gamma_e$$

où n_e est l'opposé de l'indice de e pour γ.

On va vérifier que Γ est homologue à 0 dans Ω' : si $z \notin \Omega \setminus \mathrm{E}$, ou bien $z \notin \Omega$, ou bien $z \in \mathrm{E}$. Si $z \notin \Omega$, l'indice des γ_e, contractibles dans Ω, est nul, donc

$$\mathrm{ind}_\Gamma(z) = \mathrm{ind}_\gamma(z) = 0$$

par hypothèse homologique. Si $z = e \in \mathrm{E}_1$, on a créé la compensation d'indice avec le choix de l'entier n_e.

Si $z = e \in \mathrm{E} \setminus \mathrm{E}_1$, alors l'indice est nul.

Finalement f est holomorphe dans l'ouvert $\Omega \setminus \mathrm{E}$ est l'indice par rapport à Γ est nul pour tout point en dehors. On a donc par le théorème précédent que

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$$

et on décode le résultat :

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{e \in \mathrm{E}} \mathrm{ind}_\gamma(e)\ \mathrm{Res}(f, e).$$

Compacité

Sources : Skandalis, Queffélec, Q-Z, Choquet

Définition. Un espace topologique X est *compact* s'il est séparé et si de tout recouvrement $(\mathrm{U}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de X par une famille d'ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini $(\mathrm{U}_j)_{j\in\mathrm{J}}$,

$$\mathrm{X} = \bigcup_{j\in\mathrm{J}} \mathrm{U}_j.$$

Version intersection de fermés : si on a une famille $(\mathrm{F}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de fermés de X et si toutes les intersections finies $\bigcap_{j\in\mathrm{J}} \mathrm{F}_j$ sont non vides, alors l'intersection de la famille est non vide,

$$\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{F}_i \neq \emptyset.$$

Théorème (Borel). *L'intervalle* $[0,1]$ *est compact.*

Preuve. — On donne la version de Lebesgue de la preuve de ce théorème de Borel : on donne un recouvrement de $[0,1]$ par une famille $(\mathrm{U}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ d'ouverts de $\mathbb{R}$. On considère l'ensemble A des points x de $[0,1]$ tels que $[0,x]$ puisse être « finiment couvert », c'est-à-dire recouvert par une famille finie extraite $(\mathrm{U}_j)_{j\in\mathrm{J}}$. L'ensemble A est non vide, en effet il est clair que $0 \in \mathrm{A}$.

On montre que la borne supérieure b de l'ensemble A est dans A, et que $b < 1$ est impossible (on a certainement $0 \leq b \leq 1$).

En effet, il existe un ouvert U_{i_0} de la famille qui contient b, donc un $\varepsilon > 0$ tel que

$$[b-\varepsilon, b+\varepsilon] \subset \mathrm{U}_{i_0}.$$

Par définition de la borne supérieure, il existe $x \in \mathrm{A}$ tel que

$$b - \varepsilon < x \leq b\,;$$

comme $[0,x]$ et $[b-\varepsilon, b+\varepsilon]$ sont finiment couverts, il en résulte que $[0,b]$ est finiment couvert, donc $b \in \mathrm{A}$. En fait, $[0, b+\varepsilon]$ est finiment couvert : si on avait $b < 1$, on contredirait la propriété de borne de b.

Proposition. *Dans un compact* X, *une partie* Y *est fermée si et seulement si* Y, *munie de la topologie induite, est compacte.*

Preuve. — Supposons Y fermée ; à un recouvrement ouvert de Y, on ajoute l'ouvert Y^c pour obtenir un recouvrement du compact X. Un sous-recouvrement fini de X fournit un sous-recouvrement fini de Y.

Si Y est compacte, on prouve que pour tout $x \notin \mathrm{Y}$, il existe un voisinage de x qui est disjoint de Y : pour tout $y \in \mathrm{Y}$, on trouve deux ouverts U_y et V_y tels que

$$y \in \mathrm{U}_y, \quad x \in \mathrm{V}_y, \quad \mathrm{U}_y \cap \mathrm{V}_y = \emptyset.$$

Les ouverts (U_y) recouvrent Y compact, on peut donc extraire un sous-recouvrement fini $\mathrm{U}_{y_1}, \ldots, \mathrm{U}_{y_\mathrm{N}}$ de Y, et on pose

$$\mathrm{U} = \bigcup_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{U}_{y_j}, \quad \mathrm{V} = \bigcap_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{V}_{y_j}.$$

L'ouvert U contient Y, l'ouvert V contient x et ils sont disjoints.

Proposition. *L'image continue dans un séparé d'un compact est compacte.*

Preuve. — Si on couvre $f(\mathrm{X})$ par des ouverts (V_j), les images inverses donnent un recouvrement ouvert de X ; un sous-recouvrement fini de X permettra de couvrir $f(\mathrm{K})$.

Corollaire : homéomorphismes. *Si f est continue bijective de* X *compact sur* Y *séparé, c'est un homéomorphisme.*

Preuve. — Il faut voir que l'application inverse $g = f^{-1}$ est continue. Il suffit de voir que l'image inverse des fermés de X par g est fermée dans Y : or $g^{-1}(\mathrm{F}) = f(\mathrm{F})$ est compact, donc fermé.

Valeur d'adhérence d'une suite (x_n) de points d'un espace topologique X : c'est un point x tel que pour tout voisinage V de x et tout indice n_0, il existe $n \geq n_0$ tel que $x_n \in \mathrm{V}$.

Dans un compact toute suite (x_n) admet au moins une valeur d'adhérence. Considérer l'ensemble non vide

$$\mathrm{Y} = \bigcap_{n \geqslant 0} \overline{\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}} \, ;$$

tous les points de Y sont des valeurs d'adhérence.

Minimisation des fonctions continues, ou juste sci : la fonction $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ est continue sur le compact X, ou seulement sci. Alors f est minorée et atteint sa borne inférieure.

Preuve. — On introduit une suite $(m_n) \subset \mathbb{R}$ strictement décroissante vers l'inf de f sur X, et la suite décroissante de fermés

$$\mathrm{F}_n = \{x \in \mathrm{X} : f(x) \leq m_n\}$$

non vides. Par compacité, l'intersection est non vide et en tout point de l'intersection f atteint son minimum.

Cas métrique

Dans le cas métrique : sous-suite convergente au lieu de valeur d'adhérence, énoncé de Bolzano-Weierstrass. *Si l'espace métrique (X, d) a une topologie compacte, toute suite (x_n) de points de* X *admet des sous-suites convergentes.*

En effet, dans un métrique, toute valeur d'adhérence est limite d'une sous-suite.

Définition. On dit qu'une partie A d'un espace métrique (X, d) est *précompacte* si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un nombre fini de boules $\mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$ qui recouvrent A.

BW implique complet et précompact ; complet est clair, pour précompact, considérer l'algorithme où on prend x_{n+1} à distance $\geq \varepsilon$ des précédents $x_0, \ldots, x_n$ déjà choisis, tant qu'on peut. Si on peut le faire jusqu'à l'infini on contredit BW, sinon si on s'arrête pour tout $\varepsilon > 0$ on prouve précompact.

Si (X, d) est précompact : toute partie A de X est couverte par un nombre fini de parties de petit diamètre

ou encore : tout fermé de X est réunion finie de fermés de petit diamètre.

Théorème. *Si l'espace métrique* (X, d) *est complet et précompact, sa topologie est compacte.*

Preuve. — On donne un recouvrement ouvert (U_i) de (X, d). On suppose, par l'absurde, qu'il n'existe pas de sous-recouvrement fini. Par précompacité, on coupe X en un nombre fini de parties de diamètre $\leq 1/2$; si toutes sont finiment couvrables, X est finiment couvrable, contrairement à notre l'hypothèse absurde. Il existe donc une partie fermée F_1 de diamètre $\leq 1/2$ non finiment couvrable. On peut découper F_1 en un nombre fini de fermés de diamètre $\leq 1/4$, l'un d'entre eux, $F_2 \subset F_1$ n'est pas finiment couvrable ; on construit ainsi une suite décroissante de fermés de diamètre tendant vers 0, tous non finiment couvrables. Comme X est complet, il existe un point commun x. Il existe U_{i_0} qui contient x, une boule $B(x, r) \subset U_{i_0}$ et pour le diamètre $< r$ on aura $F_n \subset B(x, r)$, donc F_n est finiment couvrable, contradiction.

Remarque. Ce qui précède reprend un raisonnement écrit dans la thèse de Pierre Cousin, 1895, soutenue le même mois que celle d'Émile Borel. Les deux contiennent une forme du théorème de compacité de $[0, 1]$ ou des fermés bornés de $\mathbb{R}^2$. La preuve de Cousin est clairement parente de la preuve du théorème de Goursat (1900).

Conclusion. *Pour un espace métrique* (X, d), *les conditions suivantes sont équivalentes :*
- *la topologie de* X *est compacte,*
- *l'espace* X *vérifie Bolzano-Weierstrass,*
- *l'espace* X *est complet et précompact.*