cours 8, le mardi 1er février 2011

Applications de la précompacité

Définition. Un sous-ensemble A d'un espace topologique séparé X est *relativement compact* dans X si l'adhérence de A dans X est compacte.

Dans un espace métrique complet (X, d), une partie A est relativement compacte si et seulement si elle est précompacte.

Deux variantes de la précompacité

— Dans un métrique complet (X, d), si une partie A est approchée pour tout $\varepsilon > 0$ par un compact K_ε, alors $\overline{\mathrm{A}}$ compacte.

— Dans un Banach E : si une partie A est bornée et approchée pour tout $\varepsilon > 0$ par un sous-espace vectoriel de dimension finie, alors $\overline{\mathrm{A}}$ est compacte.

Exemple : cube de Hilbert. On fixe un vecteur $u \in \ell^2$ et on pose

$$\mathrm{C}_u = \{x \in \ell^2 : \forall n \geq 0, \ \ |x_n| \leq u_n\}.$$

L'ensemble C_u peut être arbitrairement approché par des espaces de dimension finie : si L_n est le sous-espace des vecteurs $y = (y_m)$ tels que $y_m = 0$ pour tout $m > n$, alors on a

$$\sup_{x \in \mathrm{C}_u} d(x, \mathrm{L}_n) \leq \sum_{k>n} u_k^2$$

qui peut être rendu arbitrairement petit, donc C_u est relativement compact. Mais C_u est fermé, donc compact.

Suites généralisées

On suppose que I est un ensemble ordonné filtrant, c'est-à-dire que pour tous $i, j \in \mathrm{I}$ il existe un élément $k \in \mathrm{I}$ qui est plus grand que i et que j : on a $i \leq k$ et $j \leq k$.

Si $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est une famille de points d'un espace topologique X, indexée par cet ensemble ordonné I, on dit qu'il s'agit d'une *suite généralisée*, et on dit que (x_i) converge vers $x \in \mathrm{X}$ si :

pour tout ouvert U contenant x, il existe un indice $i_0 \in \mathrm{I}$ tel que pour tout $i \in \mathrm{I}$, on ait $x_i \in \mathrm{U}$.

Si X est séparé, le caractère filtrant implique l'unicité de la limite.

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite au sens habituel, on peut utiliser le langage précédent pour parler des sous-suites de cette suite : si on donne une sous-suite (x_{n_k}), et si on pose

$$\mathrm{M} = \{n_0 < n_1 < \ldots < n_k < \ldots\},$$

on peut utiliser le langage des suites généralisées pour parler de la sous-suite comme étant la suite généralisée $(x_m)_{m \in \mathrm{M}}$ indexée par l'ensemble infini $\mathrm{M} \subset \mathbb{N}$.

L'argument diagonal

Le problème de l'argument diagonal est surtout de trouver un langage et des notations pour désigner une suite illimitée d'extractions de sous-suites. Une possibilité, autre que le langage des injections croissantes, est de parler de suites $(x_m)_{m \in \mathrm{M}}$ indexées par un sous-ensemble infini M des entiers. On voit clairement ce que signifie la convergence d'une telle « suite », et Bolzano s'exprime en disant qu'il existe un sous-ensemble infini $\mathrm{M}_1 \subset \mathrm{M}$ tel que la suite $(x_m)_{m \in \mathrm{M}_1}$ converge.

Supposons donnés, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, un compact métrique K_p et une suite $(f_p(n))_{n \in \mathbb{N}}$ de points de K_p. Dans le langage des suites généralisées, on introduit de proche en proche une suite décroissante

$$\mathrm{M}_0 = \mathbb{N} \supset \mathrm{M}_1 \supset \ldots \supset \mathrm{M}_k \supset \ldots$$

de sous-ensembles infinis, tels que $(f_p(m))_{m \in \mathrm{M}_p}$ converge dans K_p, pour tout entier p. On définit alors « l'ensemble diagonal »

$$\mathrm{M} = \{m_0 < m_1 < \ldots < m_k < \ldots\}$$

où m_k est le plus petit élément de M_k qui est $> m_{k-1}$, et on vérifie que $(f_p(m))_{m \in \mathrm{M}}$ converge dans K_p, pour tout p.

Produit dénombrable de compacts métriques

On a une suite d'espaces métriques $(\mathrm{X}_n, d_n)_{n \geqslant 0}$, et on considère le produit infini

$$\mathrm{X} = \prod_{n \geqslant 0} \mathrm{X}_n.$$

Il n'y a pas de distance privilégiée sur ce produit (pas plus que sur les produits finis, d'ailleurs), mais une notion de *topologie produit*, dont le cas dénombrable et métrique qu'on va décrire maintenant est un cas particulier de la notion de produit quelconque d'espaces topologiques.

Un sous-ensemble V du produit X est ouvert si pour tout $x = (x_n)_{n \geqslant 0} \in \mathrm{V}$, où $x_n \in \mathrm{X}_n$, il existe N et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout point $y = (y_n)_{n \geqslant 0}$ de X, les conditions, en nombre fini

$$d_j(y_j, x_j) < \varepsilon, \quad j = 0, 1, \ldots, \mathrm{N},$$

impliquent $y \in \mathrm{V}$. Autrement dit, le voisinage fondamental

$$\mathrm{W}(x, \mathrm{N}, \varepsilon) = \{y \in \mathrm{X} : d_j(y_j, x_j) < \varepsilon,\ j = 0, 1, \ldots, \mathrm{N}\}$$

est contenu dans V.

Cette topologie est métrisable. On peut prendre

$$d(x, y) = \sum_{n \geqslant 0} 2^{-n} \min\bigl(d_n(x_n, y_n), 1\bigr).$$

Exemple. L'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles, muni de la topologie produit, a une addition et une multiplication par les scalaires qui sont continues : c'est un espace vectoriel topologique. Mais cette topologie ne peut pas être définie par une norme, pour la raison-massue que tout voisinage de 0 contient des droites (en fait : contient un espace vectoriel de codimension finie), et que les boules des espaces normés ne contiennent pas de droite !

Convergence d'une suite dans un produit dénombrable de métriques

Proposition. *Une suite* $(x^{(k)})$ *dans le produit* X *converge vers un point* $x \in \mathrm{X}$ *si et seulement si toutes ses suites coordonnées* $(x_n^{(k)})$ *convergent dans l'espace* X_n *vers la coordonnée* x_n *de la limite* x.

Preuve. — Si toutes les coordonnées convergent, il est clair que $x^{(k)}$ finit par entrer dans l'ensemble $\mathrm{W}(x, \mathrm{N}, \varepsilon)$, pour tout N et tout $\varepsilon > 0$, donc la suite converge vers le point x dans l'espace produit X.

L'inverse est clair : pour n fixé, l'appartenance de $x^{(k)}$ au voisinage $\mathrm{W}(x, n, \varepsilon)$, pour $k \geq k_0$, contient l'information

$$d_n(x_n^{(k)}, x_n) < \varepsilon.$$

Compacité du produit dénombrable de compacts métriques

Théorème. *Le produit* $\prod_{n \geqslant 0} \mathrm{K}_n$ *d'une suite d'espaces compacts métrisables est compact pour la topologie produit.*

Preuve. — Par extraction de sous-suites diagonales.

Le théorème que Tychonoff a démontré

Dans le produit $\mathrm{X} = [0, 1]^{\mathrm{I}}$, où I est un ensemble quelconque, la topologie produit est définie par les voisinages élémentaires d'un point $f \in \mathrm{X}$, qui sont donnés par

$$\mathrm{B}(f, \mathrm{J}, \varepsilon) = \{g \in \mathrm{X} : \forall j \in \mathrm{J}, |g_j - f_j| < \varepsilon\}$$

où J est fini et $\varepsilon > 0$ (cette topologie est l'invention d'Andreï Tychonoff).

Un espace topologique séparé X est *complètement régulier* si pour tout point $x \in \mathrm{X}$ et tout voisinage V de x, il existe une fonction réelle continue sur X telle que $f(x) = 0$ et $f \geq 1$ en dehors de V. On vérifie facilement que tout espace métrique vérifie cette propriété.

Théorème de Tychonoff. *Le produit* $[0, 1]^{\mathrm{I}}$ *est compact.*

Application par Tychonoff : *si* X *est un espace topologique complètement régulier, il est homéomorphe à une partie d'un espace compact.*

Preuve. — On prend pour I l'ensemble des couples (x, V) d'un point $x \in \mathrm{X}$ et d'un voisinage V de x ; on sait que pour chaque $i = (x, \mathrm{V})$ il existe une fonction continue f_i sur X telle que $f_i(x) = 0$ et $f_i \geq 1$ en dehors de V. On peut supposer f_i à valeurs dans $[0, 1]$ et on considère

$$y \in \mathrm{X} \to (f_i(y))_{i \in \mathrm{I}} \in [0, 1]^{\mathrm{I}}.$$

On vérifie qu'il s'agit d'un homéomorphisme de X sur son image dans le compact produit.

Remarque. Inversement, le lemme d'Urysohn produit suffisamment de fonctions continues sur un compact K, donc aussi sur ses sous-espaces topologiques X. Un espace topologique est donc complètement régulier si et seulement s'il est homéomorphe à une partie d'un espace compact. C'est l'énoncé de Tychonoff (avec des mots différents, la terminologie a évolué au cours du temps).

Théorème de Banach-Alaoglu

Soient E un espace normé et E′ son dual topologique ; l'espace dual est un espace de Banach. Sa boule unité

$$\mathrm{B}_* = \{x^* \in \mathrm{E}' : \|x^*\| \le 1\}$$

peut être considérée comme un ensemble de fonctions de E dans $\mathbb{R}$; plus précisément, le point $x \in \mathrm{X}$ est envoyé dans l'intervalle compact $[-\|x\|, \|x\|]$ (cas réel) par toutes les fonctions $x^* \in \mathrm{B}_*$. On peut donc identifier B_* à un sous-ensemble d'un produit de compacts,

$$\mathrm{B}_* \subset \prod_{x \in \mathrm{E}} [-\|x\|, \|x\|],$$

produit qui est compact pour la topologie produit, c'est-à-dire la topologie de la convergence simple sur E. Cette topologie est appelée *topologie ∗-faible* sur le dual E′.

Théorème. *La boule unité du dual est compacte pour la topologie ∗-faible.*

Preuve. — Il suffit de s'apercevoir que la linéarité est une condition fermée pour la convergence simple.

Un théorème de Riesz

Théorème. *Si* E *est normé et si sa boule unité est relativement compacte (pour la topologie normée), alors* E *est de dimension finie.*

Preuve. — Si E est complexe on oublie, la dimension complexe sera plus petite. Si B_E est couvert par N homothétiques de rayon $r < 1$, on considère Z de dimension finie d, contenant les N centres ; alors B_Z est couverte par N homothétiques, donc pour la mesure de Lebesgue de Z

$$0 < \lambda(\mathrm{B}_\mathrm{Z}) \le \mathrm{N} r^d \lambda(\mathrm{B}_\mathrm{Z})$$

donc $d \ln(1/r) \le \ln \mathrm{N}$. Cela étant vrai pour tout sous-espace Z de dimension finie contenant les centres, on en déduit que l'espace E lui-même est de dimension finie,

$$\dim \mathrm{E} \le \frac{\ln \mathrm{N}}{\ln(1/r)}.$$

Ascoli

On considère un espace topologique compact K et l'espace C(K) des fonctions réelles ou complexes sur K, normé par la *norme uniforme*,

$$\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in \mathrm{K}\}.$$

C'est un espace de Banach.

Ensembles équicontinus de fonctions

Un ensemble A de fonctions réelles (ou complexes) sur un espace topologique X est *équicontinu au point* $x \in \mathrm{X}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x qui « fonctionne » pour toutes les fonctions f de l'ensemble A :

$$\forall f \in \mathrm{A},\ \forall y \in \mathrm{V}, \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

On dit que A est équicontinu s'il est équicontinu en tout point.

Sur un compact métrique (K, d), un ensemble équicontinu de fonctions est *uniformément équicontinu*, c'est-à-dire que : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute fonction $f \in \mathrm{A}$, pour tous $x, y \in \mathrm{X}$, la condition $|x - y| < \delta$ entraîne $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

On peut montrer l'affirmation précédente comme on montre le théorème de Heine.

Exemples.

— Fonctions lipschitziennes ou höldériennes de constante fixée : on donne α tel que $0 < \alpha \le 1$ et une constante M. L'ensemble des fonctions f sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathrm{I}, \quad |f(x) - f(y)| \le \mathrm{M}|x - y|^\alpha$$

est uniformément équicontinu.

— Opérateurs intégraux : pour p tel que $1 < p \le \infty$, on pose pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^p([0, 1])$

$$\forall x \in [0, 1], \quad (\mathrm{T}_p f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit q l'exposant conjugué de p, $1/p = 1/q = 1$; les primitives des fonctions de la boule unité de $\mathrm{L}^p([0, 1])$, pour $p > 1$ forment un ensemble de fonctions $1/q$-höldériennes de constante 1, donc uniformément équicontinu. En effet, si $0 \le x \le y \le 1$, on a par Hölder

$$|(\mathrm{T}_p f)(y) - (\mathrm{T}_p f)(x)| = \Big|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\Big| \le (y - x)^{1/q} \Big(\int_0^1 |f(t)|^p\,\mathrm{d}t\Big)^{1/p}.$$

On dit qu'un ensemble de fonctions scalaires est *ponctuellement borné* si pour tout $x \in \mathrm{X}$, l'ensemble des valeurs $\{f(x) : f \in \mathrm{A}\}$ prises par les fonctions au point x est borné dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Théorème d'Ascoli. *Soient* K *un espace topologique compact et* A *une partie de* C(K) *; pour que l'adhérence de* A *soit compacte dans* C(K) *il faut et il suffit que :*

– l'ensemble A *de fonctions soit ponctuellement borné et équicontinu.*

Preuve. — En fait si $\overline{\mathrm{A}}$ est compact, il est borné *uniformément*, toujours pour la même raison que $f \to \|f\|$ est continue et atteint son max. L'ensemble est aussi équicontinu, comme conséquence de la possibilité d'approcher uniformément les fonctions de A en sélectionnant dans un sous-ensemble fini de A, et un ensemble fini de fonctions continues est évidemment équicontinu.

Inversement, on doit montrer que A est un ensemble précompact dans l'espace métrique complet C(K). Si $\varepsilon > 0$ est donné, l'équicontinuité fournit pour chaque $x \in \mathrm{K}$ un ouvert U_x contenant x tel que

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon/3.$$

Ensuite, on peut extraire un recouvrement fini de K par les ouverts U_{x_i} associés à des points $x_1, \ldots, x_\mathrm{M}$. Pour chaque $f \in \mathrm{A}$, posons

$$p_f = (f(x_1), \ldots, f(x_\mathrm{M})) \in \mathbb{C}^\mathrm{M} ;$$

ces points forment un borné B de $\mathbb{C}^\mathrm{M}$,

$$\mathrm{B} = \{p_f : f \in \mathrm{A}\}$$

par l'hypothèse ponctuellement borné, appliquée à chacun des points x_i. On peut alors recouvrir B, relativement compact dans $\mathbb{C}^\mathrm{M}$, par un nombre fini N de boules (de la norme du sup), centrées en des points $p_{f_1}, \ldots, p_{f_\mathrm{N}}$ et de rayon $\varepsilon/3$.

On constate pour finir que

$$\mathrm{A} \subset \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{B}(f_j, \varepsilon),$$

boules de la convergence uniforme sur K. Soit $f \in \mathrm{A}$; il s'agit de trouver j_0 tel que $\|f - f_{j_0}\|_\infty < \varepsilon$; pour le faire, il faut prendre $y \in \mathrm{K}$ quelconque et majorer $f(y) - f_{j_0}(y)$, pour le j_0 qui sera sélectionné.

Soit $f \in \mathrm{A}$; il existe j_0 tel que $p_f \in \mathrm{B}(p(f_{j_0}), \varepsilon/3)$. Pour la coordonnée i du vecteur $p_f - p_{f_{j_0}}$ de $\mathbb{C}^{\mathrm{M}}$, on obtient

$$|f(x_i) - f_{j_0}(x_i)| < \varepsilon/3.$$

Soit maintenant $y \in \mathrm{K}$ quelconque ; il existe i tel que $y \in \mathrm{U}_{x_i}$, donc

$$|f(y) - f(x_i)| < \varepsilon/3, \quad |f_{j_0}(y) - f_{j_0}(x_i)| < \varepsilon/3,$$

ce qui montre que pour tout y, on a

$$|f(y) - f_{j_0}(y)| < \varepsilon.$$

Comme K est compact, on en déduit bien que $\|f - f_{j_0}\|_\infty < \varepsilon$, et on a montré que A est précompact.