cours 9, le mercredi 9 février 2011

Exemples pour Ascoli.

— Fonctions lipschitziennes ou höldériennes de constante fixée : on donne un nombre réel α tel que $0 < \alpha \le 1$ et une constante M ; l'ensemble des fonctions f réelles ou complexes, définies sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ et telles que

$$\forall x, y \in \mathrm{I}, \quad |f(x) - f(y)| \le \mathrm{M}|x - y|^\alpha$$

est uniformément équicontinu sur I.

Si on ajoute que I est un intervalle compact contenant 0, et si on ajoute par exemple la condition $|f(0)| \le \mathrm{C}$, on obtient un ensemble

$$\mathrm{A} = \{f : \mathrm{I} \to \mathbb{R} \mid \forall x, y \in \mathrm{I}, \ \ |f(x) - f(y)| \le \mathrm{M}|x - y|^\alpha, \ \ |f(0)| \le \mathrm{C}\}$$

qui est compact pour la topologie de la convergence uniforme (un sous-ensemble compact de l'espace de Banach C(I)) ; en effet, la condition $|f(0)| \le \mathrm{C}$ et la condition de Hölder ou de Lipschitz entraînent que $|f(x)| \le \mathrm{C} + \mathrm{M}|x|^\alpha$, la famille A est donc ponctuellement bornée, et les inégalités larges impliquent qu'elle est fermée pour la convergence uniforme.

— Opérateurs intégraux : pour p tel que $1 < p \le \infty$, on pose pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^p([0, 1])$

$$\forall x \in [0, 1], \quad (\mathrm{T}_p f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit q l'exposant conjugué de p, $1/p = 1/q = 1$; les primitives $\mathrm{T}_p f$ des fonctions f de la boule unité de $\mathrm{L}^p([0, 1])$, pour $p > 1$ forment un ensemble de fonctions $1/q$-höldériennes de constante 1, donc uniformément équicontinu. En effet, si $0 \le x \le y \le 1$, on a par Hölder

$$|(\mathrm{T}_p f)(y) - (\mathrm{T}_p f)(x)| = \Bigl|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\Bigr| \le (y - x)^{1/q} \Bigl(\int_0^1 |f(t)|^p\,\mathrm{d}t\Bigr)^{1/p},$$

et $(\mathrm{T}_p f)(0) = 0$. La relative compacité résulte de l'exemple précédent.

On désignera par $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ l'espace vectoriel normé des applications linéaires *continues* entre deux espaces vectoriels normés E et F.

Définition. Un opérateur compact T de E dans un espace de Banach F est une application linéaire continue telle que l'image $\mathrm{T}(\mathrm{B}_\mathrm{E})$ de la boule unité B_E de E soit relativement compacte dans F.

Exemple. Considérons l'opérateur diagonal $\mathrm{T}_\mathbf{u}$ de l'espace de Banach c_0 des suites qui tendent vers 0, à valeurs dans ℓ_2, qui est défini par

$$\forall \mathbf{u} = (u_n)_{n \geqslant 0} \in c_0, \qquad \mathrm{T}_\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_n x_n)_{n \geqslant 0},$$

où $\sum u_k^2 < +\infty$; on voit que l'image de la boule unité de c_0 est contenue dans le cube de Hilbert, donc $\mathrm{T}_\mathbf{u}$ est compact. L'image de la boule unité n'est pas fermée, elle est dense dans le cube de Hilbert $\mathrm{C}_\mathbf{u}$. Si on définissait l'opérateur en partant de l'espace ℓ^∞ des suites bornées, l'image de la boule unité serait exactement le cube de Hilbert.

Remarque. Toute limite T en norme d'opérateurs d'une suite $(\mathrm{T}_n) \subset \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ d'opérateurs de rang fini est un opérateur compact. En effet, l'image $\mathrm{T}(\mathrm{B_E})$ de la boule unité de E est bornée, et pour tout $\varepsilon > 0$ on peut l'approcher à moins de ε par un sous-espace vectoriel de dimension finie, à savoir l'image $\mathrm{T}_n(\mathrm{E})$ de E par T_n, pour n assez grand.

Conséquences. Les opérateurs T_p, $1 < p \le \infty$, sont compacts de $\mathrm{L}^p([0,1])$ dans $\mathrm{C}([0,1])$. En revanche, on peut montrer que l'opérateur T_1 n'est pas compact de $\mathrm{L}^1([0,1])$ dans $\mathrm{C}([0,1])$ (considérer la fonction φ égale à 1 sur $[0,1/2]$, à -1 sur $(1/2,1]$ et à 0 ailleurs. Examiner ensuite la suite des fonctions $x \in [0,1] \to 2^n\varphi(2^n x)$ et leurs images par T_1).

Corollaire du théorème de Riesz. *Si* T *est un endomorphisme compact d'un espace de Banach* E *et si* $\lambda \ne 0$, *le sous-espace propre* $\mathrm{E}_\lambda = \ker(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id})$ *est de dimension finie.*

Preuve. — Sur E_λ, l'opérateur T est égal à $\lambda\,\mathrm{Id}$, donc la boule unité

$$\mathrm{B}_{\mathrm{E}_\lambda} = \frac{1}{\lambda}\mathrm{T}(\mathrm{B}_{\mathrm{E}_\lambda}) \subset \frac{1}{\lambda}\mathrm{T}(\mathrm{B_E})$$

est contenue dans un compact.

Théorème de Peano pour les équations différentielles

Théorème. *On donne* $y_0 \in \mathbb{R}^d$, $\mathrm{R} > 0$ *et* f *une fonction continue de* $\mathrm{C} = \overline{\mathrm{B}(y_0,\mathrm{R})}$ *dans* $\mathbb{R}^d$. *L'équation différentielle*

$$y' = f(y), \quad y(x_0) = y_0,$$

admet des solutions.

Preuve. — Sur le convexe compact C la fonction f est bornée en norme par un certain M. Considérons par ailleurs l'intervalle compact $\mathrm{K} = [x_0 - \mathrm{R}/\mathrm{M}, x_0 + \mathrm{R}/\mathrm{M}]$ et posons pour tout $y \in \mathbb{R}^d$

$$\mathrm{P}y = y \quad \text{si} \quad y \in \mathrm{K}, \qquad \mathrm{P}y = y_0 + \mathrm{R}\,\frac{y - y_0}{\|y - y_0\|}$$

sinon ; cette application P est continue et ramène $\mathbb{R}^d$ sur C. On peut prolonger f en fonction $\widetilde{f}$ uniformément continue bornée par M sur $\mathbb{R}^d$ en posant $\widetilde{f}(y) = f(\mathrm{P}y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^d$.

On peut approcher uniformément sur $\mathbb{R}^d$ la fonction continue $\widetilde{f}$ par des fonctions lipschitziennes (f_n), majorées par M (approximation par convolution). Comme f_n est lipschitzienne, on sait qu'il existe une solution y_n, définie sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle

$$y_n' = f_n(y_n), \qquad y_n(x_0) = y_0,$$

qui vérifie donc aussi l'équation intégrale

$$\forall x \in \mathrm{K}, \qquad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f_n(y_n(t))\,\mathrm{d}t.$$

Comme $|x - x_0| \le \mathrm{R}/\mathrm{M}$ et que f_n est bornée par M, on déduit $\|y_n(x) - y_0\| \le \mathrm{R}$, donc les fonctions y_n, restreintes à K, prennent leurs valeurs dans C. On a plus précisément pour $x_1, x_2 \in \mathrm{K}$, $x_1 < x_2$

$$\|y_n(x_1) - y_n(x_2)\| \le \int_{x_1}^{x_2} \|f_n(y_n(t))\|\,\mathrm{d}t \le \mathrm{M}(x_2 - x_1),$$

ce qui montre que toutes les fonctions (y_n) sont M-lipschitziennes, et forment donc un ensemble relativement compact pour la norme uniforme (ici, on applique une version d'Ascoli à valeurs dans $\mathbb{R}^d$). On extrait une sous-suite qui converge uniformément sur K vers une fonction y, et on obtient à la limite

$$\forall x \in \mathrm{K}, \qquad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(y(t))\,\mathrm{d}t.$$

En effet,

$$\|f(y(t)) - f_n(y_{n_k}(t))\| \le \|f(y(t)) - f(y_{n_k}(t))\| + \|f - f_n\|_\infty$$

qui tend uniformément vers 0 sur K, par la continuité uniforme de f sur C et la convergence uniforme sur K de y_{n_k} vers y.

Remarque. Il n'y a pas d'unicité dans ce cadre : l'équation $y' = 2\sqrt{|y|}$ donne un exemple classique ; l'équation avec condition initiale $y(0) = 0$ admet la solution $y_0(x) = 0$, mais aussi la solution

$$y_1(x) = x^2 \mathbf{1}_{x \ge 0}.$$

On peut décrire l'ensemble de toutes les solutions $y_{a,b}$ de cette équation, où les paramètres a et b prennent toutes les valeurs telles que $-\infty \le a \le b \le +\infty$, $a < +\infty$ et $b > -\infty$. La valeur de $y_{a,b}(x)$ est donnée par

$$-(a-x)^2 \ \text{ si } \ x \le a, \qquad 0 \ \text{ si } \ a \le x \le b, \qquad (x-b)^2 \ \text{ si } \ x \ge b.$$

Suites de fonctions holomorphes

On dit qu'une famille A de fonctions sur Ω est *localement bornée* si pour tout $z \in \Omega$ il existe un voisinage ouvert U_z de z, contenu dans Ω, et une constante M_z telle que

$$\forall f \in \mathrm{A}, \ \forall w \in \mathrm{U}_z, \qquad |f(w)| \le \mathrm{M}_z.$$

Notons une fois pour toutes qu'une hypothèse de majoration locale implique une majoration sur tout compact $\mathrm{K} \subset \Omega$: pour tout x de K, il existe un ouvert U_x contenant x et une borne locale M_x ; on peut recouvrir K par un nombre fini de ces ouverts et prendre la borne $\mathrm{M} = \max(\mathrm{M}_{x_1}, \ldots, \mathrm{M}_{x_n})$.

Théorème de Montel

Théorème. *Si la suite $(f_n) \subset \mathrm{H}(\Omega)$ est localement bornée, elle admet des sous-suites qui convergent vers une fonction $f \in \mathrm{H}(\Omega)$, uniformément sur tout compact de Ω.*

Il y a bel et bien une compacité, si on prend la peine de définir la topologie convenable sur $\mathrm{H}(\Omega)$: c'est la topologie de convergence uniforme sur les compacts $\mathrm{K} \subset \Omega$.

Preuve. — Pour tout disque fermé D contenu dans Ω il y a majoration uniforme sur D des fonctions de la suite (f_n). Pour chaque entier $n \ge 0$ on définit un compact K_n par

$$\mathrm{K}_n = \{z \in \Omega : d(z, \Omega^c) \ge 2^{-n}, \ |z| \le 2^n\},$$

et la suite des K_n recouvre Ω. Pour chaque z du compact K_n on prend un disque D_z ouvert centré en z tel que le disque fermé F_z de même centre z et de rayon double soit contenu dans Ω, et tel que les (f_n) soient bornées par M_z sur F_z ; pour chaque n, on peut extraire un recouvrement fini du compact K_n par des disques D_{z_i}, donc on peut former une liste D_m de disques qui couvrent Ω, et dont les doubles (F_m) ont les propriétés ci-dessus. On rappelle la majoration de la constante de Lipschitz : si f_n est borné par M dans le disque double F_m, elle est Lipschitz de constante $4\mathrm{M}/(2r_m)$ dans $\overline{\mathrm{D}_m}$, où r_m est le rayon de D_m ; on peut donc appliquer Ascoli localement, sur chaque compact $\overline{\mathrm{D}_m}$: pour chaque entier m, il existe une sous-suite (f_{n_j}) qui converge uniformément sur D_m ; on trouve ensuite une sous-suite diagonale (n_k) telle que

$$\forall m,\ \forall z \in \mathrm{D}_m, \quad \lim_k f_{n_k}(z) \ \text{ existe, uniformément dans } \ \mathrm{D}_m\,;$$

en particulier, la suite (f_{n_k}) converge simplement sur Ω, vers une limite f, et la convergence est uniforme sur tout compact de Ω ; par un théorème de Weierstrass, la limite simple est holomorphe.

Convergence faible des suites dans un espace de Hilbert

Théorème. *Soit* (x_n) *une suite bornée dans un espace de Hilbert* H *; il existe un vecteur* $x \in \mathrm{H}$ *et une sous-suite tels que*

$$\forall z \in \mathrm{H}, \quad \langle x_{n_j}, z\rangle \to \langle x, z\rangle.$$

On dit que la sous-suite (x_{n_k}) *converge faiblement* vers x.

Preuve. — Prenons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ pour simplifier un brin (en fait, on peut traiter le cas complexe par oubli des réels). Soit (x_n) une suite bornée dans un Hilbert H, disons bornée par M ; considérons le sous-espace vectoriel fermé H_0 engendré par cette suite. C'est un espace séparable qui admet une base hilbertienne (e_k), indexée par un ensemble fini ou dénombrable. Pour chaque k fixé, la suite

$$n \to \langle x_n, e_k\rangle$$

est une suite bornée de scalaires, qui admet des sous-suites convergentes. Par extraction diagonale on trouve une sous-suite n_j telle que

$$\forall k, \quad \langle x_{n_j}, e_k\rangle \to a_k.$$

Pour tout ensemble fini J de l'ensemble des indices k, l'inégalité

$$\sum_{k\in \mathrm{J}} \big|\langle x_n, e_k\rangle\big|^2 \le \|x_n\|^2 \le \mathrm{M}^2$$

passe à la limite comme

$$\sum_{k\in \mathrm{J}} |a_k|^2 \le \mathrm{M}^2$$

et entraîne $\sum_k |a_k|^2 \le \mathrm{M}^2 < +\infty$. Posons

$$x = \sum_k a_k e_k \in \mathrm{H}_0.$$

Si y est une combinaison linéaire des e_k il est clair par somme de limites que

$$\langle x, y\rangle = \lim_j \langle x_{n_j}, y\rangle.$$

Si $z \in \mathrm{H}_0$ on peut l'approcher par une combinaison linéaire y et alors

$$\big|\langle x_{n_j}, z\rangle - \langle x_{n_j}, y\rangle\big| \le \mathrm{M}\,\|z - y\|$$

montre que $\langle x_{n_j}, z\rangle$ converge vers $\langle x, z\rangle$. Si $z \in \mathrm{H}_0^\perp$ c'est évident car

$$\langle x_{n_j}, z\rangle = 0$$

pour tout k, tout comme $\langle x, z\rangle$.

Adjoint hilbertien

On introduit ainsi l'adjoint hilbertien T^* d'un opérateur linéaire continu $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)$ entre deux espaces de Hilbert H_1 et H_2 : pour tout $y \in \mathrm{H}_2$, l'application $x \in \mathrm{H}_1 \to \langle \mathrm{T}x, y\rangle$ est une forme linéaire continue sur H_1, donc représentable par le produit scalaire avec un vecteur de H_1 qu'on appellera T^*y ; on a donc

$$\forall x \in \mathrm{H}_1,\ \forall y \in \mathrm{H}_2, \quad \langle \mathrm{T}x, y\rangle = \langle x, \mathrm{T}^*y\rangle.$$

Il est clair que T^* est linéaire de H_2 dans H_1, et continue avec $\|\mathrm{T}^*\| = \|\mathrm{T}\|$, car

$$\|\mathrm{T}^*\| = \sup_{y \in \mathrm{B}(\mathrm{H}_2)} \|\mathrm{T}^*y\| = \sup_{y \in \mathrm{B}(\mathrm{H}_2)} \sup_{x \in \mathrm{B}(\mathrm{H}_1)} |\langle \mathrm{T}^*y, x\rangle|$$

$$= \sup_{x \in \mathrm{B}(\mathrm{H}_1)} \sup_{y \in \mathrm{B}(\mathrm{H}_2)} |\langle \mathrm{T}x, y\rangle| = \sup_{x \in \mathrm{B}(\mathrm{H}_1)} \|\mathrm{T}x\| = \|\mathrm{T}\|.$$

Les classes d'opérateurs : hermitien, normal, unitaire, isométrie peuvent se définir à partir de cette notion d'adjoint. Un opérateur hermitien $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H}))$ est défini par $\mathrm{T}^* = \mathrm{T}$, mais il est commode pour la suite de noter que T est hermitien si et seulement si

$$\forall x, y \in \mathrm{H}, \quad \langle \mathrm{T}x, y\rangle = \langle x, \mathrm{T}y\rangle,$$

ce qui rend évident le fait que la restriction d'un hermitien à un sous-espace stable reste hermitienne. L'opérateur $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ est normal si $\mathrm{T}^*\mathrm{T} = \mathrm{T}\,\mathrm{T}^*$, unitaire si T^* est l'inverse de T, soit $\mathrm{T}^*\mathrm{T} = \mathrm{T}\,\mathrm{T}^* = \mathrm{Id}_\mathrm{H}$, ce qui montre que les unitaires sont normaux.

En dimension infinie la relation $\mathrm{T}^*\mathrm{T} = \mathrm{Id}$ ne suffit pas à caractériser les unitaires : elle caractérise les isométries, y compris dans le cas où T opère d'un espace H_1 dans un autre H_2. Un exemple simple et classique est celui du *décalage* (à droite) ou *shift* S défini sur $\ell^2(\mathbb{N})$ par

$$(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \to (0, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, \ldots).$$

L'adjoint S^* est le décalage à gauche, le produit $\mathrm{S}^*\mathrm{S}$ est l'identité mais $\mathrm{S}\,\mathrm{S}^*$ est le projecteur

$$(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \to (0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots).$$

Diagonalisation des hermitiens compacts

Lemme. *L'image par $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)$ de la boule unité fermée de l'espace de Hilbert H_1 est fermée dans l'espace de Hilbert H_2.*

Preuve. — Supposons que $(x_n) \subset \mathrm{B}_{\mathrm{H}_1}$ et que $\mathrm{T}x_n$ tende vers $y \in \mathrm{H}_2$; on peut trouver une sous-suite (x_{n_j}) qui vérifie le résultat du théorème précédent, avec une limite faible x qui est un vecteur de la boule unité de H_1. Si $z \in \mathrm{H}_2$ est fixé, on écrit

$$\langle \mathrm{T}x_{n_j}, z\rangle = \langle x_{n_j}, \mathrm{T}^*z\rangle \to \langle x, \mathrm{T}^*z\rangle = \langle \mathrm{T}x, z\rangle.$$

Mais comme $\mathrm{T}x_n$ tend en norme vers y, on a aussi

$$\lim_j \langle \mathrm{T}x_{n_j}, z\rangle = \langle y, z\rangle.$$

Il en résulte que $\langle \mathrm{T}x - y, z\rangle = 0$ pour tout z. Il s'agit pour finir de voir que $y = \mathrm{T}x$; il suffit de poser $z = \mathrm{T}x - y$ pour obtenir ce résultat, qui montre que tout point y adhérent à l'image de la boule unité est en fait dans l'image de cette boule.

Remarque. Une preuve plus sophistiquée procède ainsi : la boule unité fermée B du Hilbert H_1 est faiblement compacte, l'application linéaire continue T est aussi faiblement continue, l'espace d'arrivée est faiblement séparé, donc l'image de la boule est faiblement compacte, donc faiblement fermée, donc fermée.

Cette preuve fonctionne aussi quand l'espace d'arrivée est un espace normé F quelconque : le fait que la topologie faible de F soit séparée résulte du théorème de Hahn-Banach. La propriété de compacité faible de la boule unité de l'espace de départ E caractérise les *espaces réflexifs.*

Lemme. *Si l'opérateur* A *est un endomorphisme hermitien compact de l'espace de Hilbert* $\mathrm{H} \neq \{0\}$, *alors* $\|\mathrm{A}\|$ *ou* $-\|\mathrm{A}\|$ *est valeur propre de* A.

Preuve. — L'image de la boule unité fermée est fermée dans H, donc $\mathrm{K} = \mathrm{A}(\mathrm{B_H})$ est un compact. La norme étant continue sur le compact K, on peut considérer

$$\tau^2 = \max\{\|y\|^2 : y \in \mathrm{K}\},$$

atteint en un certain $y_0 = \mathrm{A}(x_0) \in \mathrm{K}$; si $\tau = 0$, alors $\mathrm{A} = 0$ et tous les vecteurs non nuls de H sont vecteurs propres pour la valeur $0 = \|\mathrm{A}\|$; si $\tau \neq 0$, il est clair que $\|x_0\| = 1$, sinon on peut « faire mieux » en multipliant x_0 par $t > 1$, proche de 1.

On note que

$$\|\mathrm{A}x\|^2 = \langle \mathrm{A}x, \mathrm{A}x \rangle = \langle \mathrm{A}^2 x, x \rangle$$

pour tout $x \in \mathrm{H}$. On a donc $\langle \mathrm{A}^2 x, x \rangle \leq \langle \mathrm{A}^2 x_0, x_0 \rangle$ pour tout $x \in \mathrm{B_H}$. Si $\mathrm{H} = \mathbb{K}x_0$ le résultat est évident ; sinon, on prend $v \perp x_0$ de norme un, et on pose

$$x_\theta = \cos(\theta) x_0 + \sin(\theta) v,$$

qui décrit une courbe sur la sphère unité de H. La maximisation de $\langle \mathrm{A}^2 x_\theta, x_\theta \rangle$ en $\theta = 0$ donne

$$\mathrm{Re}\langle \mathrm{A}^2 x_0, v \rangle = 0\,;$$

dans le cas complexe, en remplaçant v par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, v$ convenable, on déduit que

$$\langle \mathrm{A}^2 x_0, v \rangle = 0\,;$$

dans l'espace V de dimension ≤ 2 engendré par x_0 et $\mathrm{A}^2 x_0$, on voit que tout vecteur v orthogonal à x_0 est aussi orthogonal à $\mathrm{A}^2 x_0$: comme l'orthogonal de $v \neq 0$ dans V de dimension ≤ 2 est de dimension ≤ 1 et contient x_0, il en résulte que $\mathrm{A}^2 x_0$ est un multiple scalaire de x_0. Si on pose $\mathrm{A}^2 x_0 = \lambda x_0$, on a

$$\|\mathrm{A}\|^2 = \langle \mathrm{A}^2 x_0, x_0 \rangle = \lambda \langle x_0, x_0 \rangle = \lambda,$$

donc

$$(\mathrm{A}^2 - \|\mathrm{A}\|^2 \,\mathrm{Id})(x_0) = (\mathrm{A} - \|\mathrm{A}\| \,\mathrm{Id})(\mathrm{A} + \|\mathrm{A}\| \,\mathrm{Id})(x_0) = 0,$$

ce qui entraîne que $\|\mathrm{A}\|$ ou $-\|\mathrm{A}\|$ est valeur propre de A.

Suite de la diagonalisation des hermitiens compacts

Théorème. *Si* A *est un endomorphisme hermitien compact d'un espace de Hilbert* H, *il existe une base hilbertienne de* H *dont tous les éléments sont des vecteurs propres de* A.

Preuve. — On suppose H de dimension infinie, sinon c'est trop facile. On pose $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}$, qui admet d'après le lemme 1 un vecteur propre e_0, qu'on peut supposer de norme un, correspondant à la valeur propre $\pm\|\mathrm{A}\|$,

$$\mathrm{A}e_0 = \pm\|\mathrm{A}\|\, e_0.$$

On note que l'orthogonal $\mathrm{W} = \mathrm{V}^\perp$ d'un sous-espace V stable par A est stable aussi,

$$\forall w \perp \mathrm{V},\ \forall v \in \mathrm{V}, \quad \langle \mathrm{A}w, v\rangle = \langle w, \mathrm{A}v\rangle = 0.$$

L'orthogonal H_1 de $\mathrm{V}_0 = \mathrm{Vect}(e_0)$ est donc stable, et on désigne par $\mathrm{A}_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_1)$ la restriction de A à H_1.

Si les vecteurs propres $e_0, \ldots, e_n$ ont déjà été trouvés, on pose $\mathrm{V}_n = \mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_n)$; ce sous-espace vectoriel est stable par A, donc son orthogonal $\mathrm{H}_{n+1} = \mathrm{V}_n^\perp$ aussi, la restriction de A à H_{n+1} est notée A_{n+1}, et A_{n+1} est hermitien, et compact (parce que l'image de la boule unité de H_{n+1} par A_{n+1} est contenue dans l'image par A de la boule unité de H). L'espace de dimension finie V_n est distinct de H, donc l'orthogonal H_{n+1} n'est pas réduit à zéro et il existe d'après le lemme 1 un vecteur propre $e_{n+1} \in \mathrm{H}_{n+1}$ pour A_{n+1}, de norme 1 si on veut, tel que

$$\mathrm{A}e_{n+1} = \pm\|\mathrm{A}_{n+1}\|\, e_{n+1}.$$

Par construction, le vecteur e_{n+1} est orthogonal aux précédents $e_0, \ldots, e_n$.

La suite $\|\mathrm{A}_n\|$ est décroissante, elle tend vers 0, sinon on contredit la compacité de A : si on pose $\delta = \lim_n \|\mathrm{A}_n\|$, les valeurs propres (λ_n) successives, qui sont réelles de valeur absolue égale à $\|\mathrm{A}_n\|$, ont une valeur absolue $\geq \delta$. On a donc pour $m \neq n$

$$\|\mathrm{A}e_m - \mathrm{A}e_n\|^2 = \|\lambda_m e_m - \lambda_n e_n\|^2 = \lambda_m^2 + \lambda_n^2 \geq 2\delta^2.$$

Comme tous les points $(\mathrm{A}e_n)$ sont dans le compact $\mathrm{A}(\mathrm{B}_\mathrm{H})$ image de la boule unité, il n'est pas possible que leurs distances mutuelles soient minorées par un nombre > 0. On a donc

$$\lim_n \|\mathrm{A}_n\| = \delta = 0.$$

L'espace fermé V_∞ engendré par la suite orthonormée $(e_n)_{n\geqslant 0}$ est stable par A, et A est nul sur l'orthogonal H_∞ ; en effet, les vecteurs y de H_∞ sont dans tous les H_n, donc

$$\|\mathrm{A}y\| = \|\mathrm{A}_n y\| \leq \|\mathrm{A}_n\|\, \|y\|$$

pour tout n, ce qui implique $\mathrm{A}y = 0$. On complète éventuellement, dans le cas où $\mathrm{H} \neq \mathrm{V}_\infty$, la suite orthonormée (e_n) par une base hilbertienne de H_∞, formée de vecteurs du noyau de A. On obtient finalement une base hilbertienne de H, formée de vecteurs propres de A.